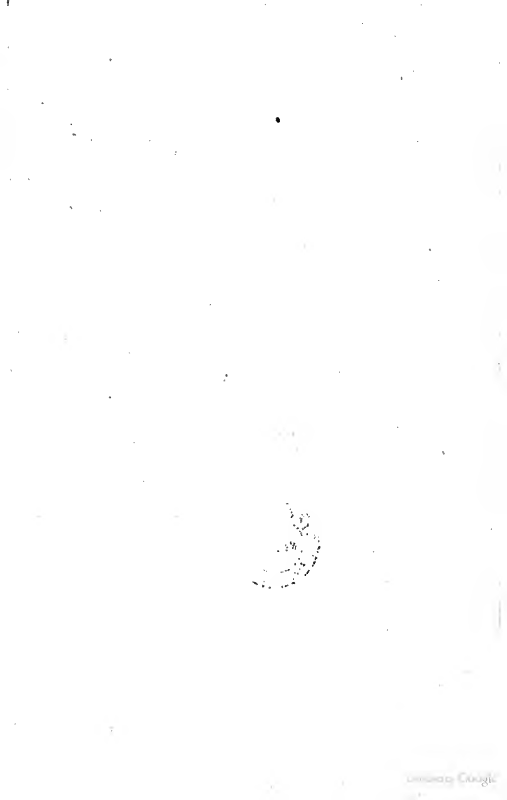

VITTORIO EM. III







DISSERTATION SUR LES VRAIS PRINCIPES

DE

L'ALGÈBRE.



Ouvrages du même Auteur, chez le même Libraire :

1. Nouvelles démonstrations de la formule du binome de Newton. 1854.
2. Quelques questions de Géométrie et d'Analyse algébrique. 1855.
3. Coup-d'œil sur l'Enseignement des Mathématiques dans les Établissements d'Instruction moyenne. 1858.
4. Cours de Géométrie descriptive (épuisé). 1860.
5. Dissertation sur les vrais principes des calculs transcendants, examen critique des diverses conceptions proposées jusqu'à ce jour. 1860.
6. Cours complet de Mathématiques. — Tome I. — Arithmétique. 1861.
7. Cours complet de Mathématiques. — Tome VII. — Topographie (Seconde édition). 1861.

POUR PARAÎTRE EN OCTOBRE 1862 :

Cours complet de Mathématiques. — Tome II. — (Algèbre élémentaire.)

Pour paraître prochainement :

Géométrie complète.

Géométrie descriptive (Seconde édition).

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE

L'ALGÈBRE

ET

ÉTABLISSEMENT A PRIORI DES RÈGLES PRINCIPALES

PAR

A.-J.-N. PAQUE,

PROFESSEUR À L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE, ÉLÈVE-INGÉNIEUR DES PONTS-ET-CHAUSSÉES
PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE
DES SCIENCES DE LIÉGE, ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE TOULOUSE,
ET DE L'ACADÉMIE STANISLAS DE NANCY.

LIÉGE
H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
RUE TRAPPÉ.

Août 1862.



DISSERTATION

SUR

LES VRAIS PRINCIPES DE L'ALGÈBRE.

PAR

A. J. N. PAQUE.

Introduction.

Il y a, au point de vue de la philosophie mathématique, un fait digne d'attention et devant lequel on s'est arrêté brusquement, sans en chercher l'explication, comme s'il pouvait être permis de bâtir sur un terrain dont on ne connaît pas la nature : on rencontre ainsi, dans la suite, une série de difficultés que l'on est obligé de vaincre à l'aide d'explications ou d'hypothèses, dont le moindre inconvénient est de déparer, par hétérogénéité, l'ensemble d'une science logique et rigoureuse par excellence.

Ce fait est le suivant.

L'Arithmétique, la Géométrie, la Statique ont reçu des définitions justes et claires même pour ceux qui sont étrangers aux spéculations mathématiques ; chacun se fait une idée précise de ces sciences ayant pour buts respectifs l'étude des propriétés des nombres, de l'étendue, ou de l'équilibre des forces. Mais la partie analytique ne présente plus la même lucidité dans ses définitions fondamentales, et pour s'en convaincre il suffirait de comparer et de discuter les définitions que les plus grands géomètres ont présentées de l'Algèbre : cet examen serait inutile ici, car toutes ces définitions sont généralement reconnues *obscures, peu intelligibles, insuffisantes et non caractéristiques.*

Des efforts infructueux que l'on a faits pour trouver une définition *complète*, coordonnée avec celles des autres parties des mathé-

matiques, nous croyons pouvoir conclure que l'on n'a pas encore entièrement saisi le véritable caractère de l'Algèbre, et que jusqu'à présent l'on n'a, philosophiquement parlant du moins, exécuté dans cette science que des *manipulations littérales*.

Il y a deux voies générales d'exploration mathématique, dont l'une étudie la *forme*, et l'autre la *valeur* des éléments des corps : entre ces deux voies il devrait toujours y avoir *correspondance immédiate et complète*, afin de permettre sans effort *le passage du concret à l'abstrait*.

Pour ne pas s'être placé à ce point de vue, on a été entraîné dans des *définitions de noms*, dont l'ensemble produit l'obscurité qui domine l'analyse, et parfois, la géométrie.

Au point de vue *concret*, c'est-à-dire de la *forme* ou de l'*étendue*, nous croyons qu'il faut d'abord saisir et mettre en évidence les deux grands modes de *translation* et de *rotation* suivant lesquels s'accomplit la génération des grandeurs, et distinguer ensuite avec soin le sens ou la direction générative du mode.

Au point de vue abstrait, on doit considérer en particulier la grandeur dans le mode et selon la direction qui l'a créée ; on effectue seulement alors sa comparaison avec une unité convenablement choisie.

Lorsque, pour concevoir la génération des grandeurs, on considère un point qui se meut, on reconnaît sans peine que ce point est SANS CESSE *soumis à deux influences, ou à deux forces*, dont les actions, DÉTERMINÉES ET CONTINUES, s'exercent ainsi à CHAQUE INSTANT, et font décrire, par la combinaison de leurs effets, le lieu réellement parcouru, c'est-à-dire la *trajectoire* du point.

Dans ce mouvement, et à un instant quelconque, si les forces qui sollicitent le point continuaient leur action, en *persistant* dans la détermination qui leur est alors *particulière*, la trajectoire deviendrait une ligne droite, c'est-à-dire le type d'un seul déplacement, ou d'une seule direction conservée invariablement.

C'est là le mouvement par TRANSLATION.

Mais, le plus souvent, les forces qui concourent au mouvement varient à chaque instant, suivant des lois *connues* ou *données* : il s'en suit que pour passer de l'une à l'autre de deux positions consécutives, le point générateur doit, dans une direction déterminée passant par la première, et en vertu d'une force de trans-

lation, avancer d'une certaine quantité, tandis que *simultanément* il se meut d'une quantité angulaire *convenable* pour abandonner la direction que la translation lui avait d'abord imposée.

Ce mouvement *angulaire* doit évidemment être regardé comme une ROTATION exécutée par le point mobile autour de chaque position qu'il acquiert.

L'étude approfondie des trajectoires curvilignes est du ressort de la Géométrie, et il n'y a pas lieu de s'en occuper ici; il nous *suffit* maintenant de constater et de faire comprendre que le mouvement d'un point a lieu par suite d'effets *simultanés et continus de translation et de rotation :* l'uniformité et la variation de ces actions, de natures si différentes, donnent lieu à toutes les espèces et à toutes les variétés de courbes possibles, tant planes que gauches.

Cet ordre d'idées permet d'établir A PRIORI les théories des quantités positives, négatives et imaginaires, et de dégager ainsi l'Algèbre de l'échafaudage d'absurdités plus ou moins sérieuses, dont on l'avait entouré jusqu'aujourd'hui.

Ce travail comprend trois parties, dont les deux premières exposent respectivement les lois analytiques des générations par translation et par rotation, et dont la troisième présente les conséquences principales des principes développés précédemment.

En parcourant rapidement la partie dogmatique de la science, nous rectifierons et nous généraliserons quelques points qui laissent plus ou moins à désirer.

PREMIÈRE PARTIE.

—

TRANSLATION ANALYTIQUE.

I.

Usage des lettres dans le calcul. — Caractère principal de l'Algèbre. — Correspondance entre l'opposition des directions et l'opposition des signes. — Quantités positives et négatives; nombres positifs, négatifs. — Règles des signes.

1. Afin de maintenir l'enchaînement des calculs et de rappeler les diverses parties du raisonnement, on remplace avantageusement les nombres par des lettres. Cette manière de représenter les grandeurs n'a rien de nouveau puisqu'en Arithmétique on en fait sans cesse usage, mais il importe, même en dehors de toute étude mathématique de se familiariser avec un semblable mode de représentation dont l'emploi est continuel aujourd'hui : en effet dans les collections d'espèce quelconque ne désigne-t-on pas par des lettres chacune des parties du tout, en attribuant à chaque lettre la valeur particulière et spéciale de l'objet correspondant.

2. L'Arithmétique et l'Algèbre tiennent de si près l'une à l'autre qu'il serait difficile, dès le principe, de donner de la seconde de ces sciences, une définition claire et précise : disons *seulement* ici, et pour le moment, que l'Algèbre ne consiste pas *uniquement* à faire usage de lettres dans les démonstrations, mais bien à *introduire d'une manière* EXPLICITE dans les calculs, *l'idée de direction,* c'est-à-dire *à considérer le mode suivant lequel s'accomplit la génération de la quantité par accroissement ou par décroissement ; à préciser par une notation convenable, le sens dans lequel cette génération a lieu.*

En Arithmétique on admet implicitement que la génération des grandeurs est ascendante, et par *voie de décomposition* on redescend ensuite l'échelle ou la série numérique ainsi formée : mais pourquoi cette décomposition semble-t-elle s'arrêter à l'unité, qui est le point de départ de l'échelle de formation? et dans cette série, qui représente les différents *accroissements* en nombre illimité, que l'on peut donner à une grandeur de *valeur quelconque*, pourquoi le *régime contraire de décroissement* n'est-il pas lui-même illimité, indéfini à partir du même point, c'est-à-dire de l'unité ?

C'est parce que la comparaison des quantités a été faite au point de vue *particulier et spécial* de la *formation par accroissement.*

Un exemple, malheureusement devenu trivial nous fera mieux comprendre : une personne qui reçoit 5000 francs et qui en doit 2000, dit qu'elle n'a en réalité que 5000 — 2000 ou 3000 francs; mais si elle ne reçoit que 2000 et qu'elle doive 5000 francs, il est clair qu'après avoir soldé la somme de 2000 elle aura encore à *payer* 3000 francs : voilà donc deux sommes de 3000 francs qui sont loin d'être égales, puisque l'une d'elles exprime un accroissement et l'autre un décroissement, *par rapport à un état de fortune déterminé et quelconque.*

L'échelle des nombres ne présente nullement une distinction semblable, et l'on constate ainsi une lacune importante que l'on est toutefois parvenu à combler à l'aide d'interprétations qui, bien que rigoureuses mais *incomplètes*, ne sont rien autre chose que des détours regrettables.

3. Lorsqu'à propos de la formation des nombres nous parlons ainsi d'*accroissement* et de *décroissement*, nous *particularisons* l'expression de direction, propre à la génération par translation des grandeurs d'un ordre quelconque.

Sous une forme plus générale supposons la droite V sur laquelle deux points fixes A et P sont donnés, de telle sorte que AP ait une longueur l; considérant les deux points M et M' équidistants de A sur cette droite, il viendra, en désignant par z la distance linéaire A M,

P M' A M V

$$PM = l + z$$
$$PM' = l - z$$

Actuellement si nous remarquons que l'opposition des signes de z, dans ces deux égalités correspond, pour les lignes AM et AM′, à une opposition de directions par rapport au point A pris pour origine, il est clair que l'on est conduit à cette loi générale et simple :

L'opposition de directions des grandeurs entraîne l'opposition de signes dans la représentation analytique de ces éléments.

Tel est le principe fondamental connu, en géométrie analytique, sous le nom de *principe de Descartes* : on doit le poser au début de l'Algèbre, parce qu'il est seul apte à mettre en évidence la vraie signification des deux espèces bien différentes de quantités dont l'analyse a à s'occuper.

4. Les grandeurs, considérées au point de vue de la valeur et de la direction, introduisent donc dans les calculs des nombres de mêmes signes ou de signes opposés, selon que les directions correspondantes de génération sont identiques ou contraires.

Il en résulte que pour rappeler la correspondance des oppositions de directions et de signes, on est conduit à donner le même signe (+) par exemple, aux quantités ayant une même direction et par suite à effectuer du signe (—) toutes les quantités dont la direction est opposée.

On comprend que nous aurons désormais deux espèces de quantités à soumettre au calcul.

Les quantités positives, qui précédées du signe +, admettent toutes la même génération déterminée ;

Les quantités négatives, précédées du signe —, et qui sont douées d'une génération commune inverse, ou contraire, de la précédente.

De là les *nombres positifs et négatifs*, dont la génération propre ou individuelle est la même, et qui ne diffèrent que par l'opposition de signes provenant de l'opposition de directions dans les grandeurs; les signes + et — des nombres ont exactement les mêmes raisons d'être, et l'un n'a pas, au détriment de l'autre, le privilége de caractériser l'impossibilité.

5. Les quantités négatives ont donc *en mathématique* une existence aussi certaine et aussi rationnelle que les quantités positives, *dont elles ne diffèrent que par le sens ou la direction*; et il est absurde de prétendre, comme on l'a fait si souvent, que les quantités douées du signe + sont supérieures à *zéro*, qui n'est pas même une quantité, tandis que les quantités possédant le signe —

sont inférieures à la même limite : les unes et les autres sont, chacune dans leur espèce, propres aux mêmes opérations suivant des lois *communes*; c'est seulement lorsque les deux genres se combinent, qu'un *calcul* spécial devient nécessaire, et qu'ainsi à côté de chaque opération fondamentale arithmétique et littérale vient se placer l'opération de même nom relative aux signes $+$ et $-$, dont peuvent être affectés les éléments d'une question ; c'est ainsi que l'on rencontre les *règles des signes.*

6. L'Algèbre se partage naturellement en deux parties dont la première est relative au *calcul littéral*, et établit les règles à suivre pour exécuter à l'aide des nouvelles notations, les principales opérations fondamentales de l'Arithmétique ; et dont la seconde expose le *Calcul équationnel*, qui traite de la représentation et de la transformation des relations d'égalité ou d'inégalité, qui peuvent exister entre les grandeurs ou entre les nombres, alors que ces relations dépendent de certaines conditions accidentelles ou générales.

Le *calcul par équation* ayant sans cesse besoin du calcul littéral, c'est de ce dernier dont il faut d'abord faire l'étude.

Lorsque nous aurons fait connaître l'influence de la génération par rotation des grandeurs sur la représentation analytique, nous pourrons seulement, dans la troisième partie, obtenir de l'Algèbre une *définition concise, claire et complète.*

7. Le produit d'un certain nombre de *facteurs égaux* prend le nom de *puissance* ; la *base* de cette puissance est le facteur répété par multiplication et le *degré* de la puissance est le nombre ou la quotité des facteurs égaux pris par *voie factorielle* ; l'exposant peut donc être lui-même représenté par une lettre.

Considérant le produit d'une quantité quelconque N par la fraction $\frac{1}{d^n}$, c'est-à-dire

$$N \cdot \frac{1}{d^n} = \frac{N \cdot 1}{d^n} = \frac{N}{d^n}$$

On voit que cette opération revient à la division suivante,

$$N : d^n = \frac{N}{d^n}$$

Dans laquelle l'*exposant* n *indique le nombre de fois que la quantité* d *est prise comme* DIVISEUR ; or comme la division n'est en

définitive qu'une soustraction rapide du même nombre, CONVENONS IMMÉDIATEMENT *pour rappeler cette origine soustractive du diviseur* de qualifier du signe (—) le degré de la puissance par laquelle on divise, et d'écrire ainsi, sous la forme factorielle,

$$N : d^n = N . d^{-n}$$

Dès lors nous dirons que,

***L'exposant** est un nombre positif ou négatif, selon que la quantité qu'il affecte joue le rôle de facteur ou de diviseur.*

Remarquons en passant que le changement de signes de l'exposant correspond encore à une opposition de générations des grandeurs, par les voies inverses de la multiplication et de la division.

8. On démontre en Arithmétique, (1) que l'*on élève un produit à une puissance en élevant chaque facteur à cette puissance*; on a eu d'après cela,

$$(a\, b\, c....)^n = a^n\, b^n\, c^n....$$

Actuellement si nous supposons que tous les facteurs, en nombre k, du produit $a\, b\, c...$ soient égaux à a, il viendra :

$$(a^k)^n = a^n\, a^n\, a^n....$$

Remarquant que a est contenu n fois comme facteur dans la puissance a^n, prise k fois par multiplication, on en conclut aisément que a est, en tout, kn fois facteur; par suite,

$$(a^k)^n = a^{kn}$$

D'où évidemment en extrayant la racine n^e pour retourner à la quantité primitive :

$$a^k = \sqrt[n]{a^{kn}}$$

Ce qui prouve que *pour extraire la racine n^e d'une puissance, il faut diviser le degré de la puissance par l'indice de la racine à extraire;* cette loi est générale en présence de la théorie des nombres incommensurables (2).

Il suit de là que, si l'on pose, p et q étant des nombres entiers,

$$x = \sqrt[q]{a^p}$$

(1) Voir notre *Arithmétique*, (p. 62).
(2) Voir notre *Arithmétique*, Liv. VI.

On aura

$$x = a^{\frac{p}{q}}$$

Voilà donc des *exposants* $\frac{p}{q}$ *fractionnaires*, suffisamment et clairement définis par *la racine d'indice égal au dénominateur d'une puissance, de degré égal au numérateur;* plus tard on aura à revenir avec détails sur ce point important, et l'on remarquera ici en passant que $\frac{p}{q}$ peut être incommensurable avec 1.

9. Il nous reste, pour compléter ce que nous avons à dire à propos de la définition générale de l'exposant, à considérer le *cas singulier* de la division d'une puissance quelconque a^n par elle-même.

Le quotient est évidemment égal à 1, puisque arithmétiquement parlant, 1 est le seul nombre qui multiplié par une quantité, donne pour produit cette même quantité.

On a donc

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Mais puisque l'exposant n, qui affecte le dénominateur, indique la division par a^n il en résulte que, chaque fois que a est pris par multiplication, il l'est également par division : a ne faisant pas ainsi partie du quotient *on a cherché à indiquer que* a *ne figure pas comme facteur* et l'on a trouvé naturellement l'expression a^0, à laquelle toutefois il faut attribuer la valeur

$$a^0 = 1$$

Ce n'est donc que par suite d'une extension conventionnelle de notation que l'on a introduit en algèbre des quantités, ayant zéro pour exposant, et pour lesquelles la définition de l'exposant n'offrirait *à priori* aucun sens possible.

10. Sans considérer les exposants, l'expression est un *polynome*, si elle est composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —; ces diverses parties sont les *termes* du polynome.

Ainsi donc l'expression

$$-ab^2c + 11a^mb^{-3} - 9a^3b^5 - 2b^{-x} + \frac{7}{9}a^2x^{-p} - \sqrt[n]{a^3b^{-2}x^{-2}}$$

est un polynome, parce que, sans avoir égard aux signes qui peuvent entrer dans la composition des exposants, on y trouve diverses parties telles par exemple que

$$9\,a^3\,b^3 \quad et \quad -\,2b^{-x}$$

séparées *consécutivement* l'une de l'autre par l'un des signes + ou —. Chacune de ces parties accompagnée du signe qui la précède immédiatement est un *terme;* on voit donc que

$$-9\,a^3\,b^3 \quad et \quad -\,2b^{-x}$$

sont deux termes du polynome.

Dans le cas où un seul des signes + ou — ne se trouve employé qu'une seule fois, l'expression algébrique prend le nom de *monome;* voici un exemple

$$-\,2\,a^4\,b^2\,c^{-3}$$

On donne spécialement le nom de binome à un polynome composé de *deux* termes, celui de *trinome* au polynome qui en renferme *trois;* mais on ne particularise guère plus loin les noms d'une quantité algébrique par rapport aux nombres de termes qui la composent.

11. Des quantités sont *fonctions* l'une de l'autre lorsqu'un changement arbitraire dans la valeur d'une ou de plusieurs d'entr'elles entraîne un changement dans la valeur des autres, et l'on appelle *fonction* l'expression analytique de la loi qui lie ces quantités.

Ainsi

$$3\,xy^2 - \sqrt{7\,xy^3}$$

est une fonction de x et de y, parce que le moindre changement de valeur imposé isolément ou simultanément à x et à y, fait varier la valeur du polynome proposé.

Dans une fonction on distingue en général deux espèces de quantités : les *constantes* qui ont une valeur fixe et invariable, bien qu'arbitraire, et les *variables* qui n'ont pas de valeur déterminée et qui peuvent recevoir une suite de valeurs se déduisant les unes des autres par *voie de continuité,* c'est-à-dire SANS INTERRUPTION.

Pour indiquer une fonction d'une ou de plusieurs variables x, y, z on emploie les notations ou caractéristiques,

$$f,\ F,\ \psi,\ \varphi,\ f',\ F',\ \text{etc.}$$

ainsi F (x) représente une fonction x de forme *quelconque;* de même on aurait la notation,

$$3x^2y - \sqrt{7x^3y} = \varphi(x, y)$$

Lorsqu'on se sert de la même lettre f en écrivant :

$$f(x) \ , \ f(y)$$

on veut exprimer que ces fonctions sont exactement composées de la même manière, l'une en x et l'autre en y; il en résulte qu'elles se transforment l'une dans l'autre à l'aide du seul changement de x en y, et réciproquement.

Supposons l'expression

$$z = f(x)$$

La quantité x, à laquelle la variation continue est imposée *à priori*, s'appelle *variable indépendante*, tandis que l'on nomme *variable dépendante* la quantité z dont les changements de valeurs sont dus à la variabilité de x.

II.

DE L'ADDITION.

—

Règle des signes. — Addition des polynomes. — Interversion de l'ordre des termes d'un polynome. — Réduction des termes semblables.

12. Cette opération s'indique en séparant par des signes $+$ les différents additifs renfermés, au préalable, entre parenthèses; de sorte que pour les deux polynomes

$$a + b - c \quad et \quad p - q + r$$

On écrira

$$(a + b - c) + (p - q + r)$$

Règle des signes. — Considérons actuellement les combinaisons suivantes de signes que l'addition de deux monomes peut présenter :

$$(+ a) + (+ b)$$
$$(- a) + (+ b)$$
$$(+ a) + (- b)$$
$$(- a) + (- b)$$

Le principe de Descartes, expression mathématique de la *dualité du sens*, nous conduit sans effort à la solution de ces divers cas.

En effet, a et b représentent des nombres d'unités de génération dont les sens sont marqués par les signes $+$ ou $-$ qui accompagnent ces lettres : comme on peut dire que l'addition procède à la composition des grandeurs par voie d'unités de directions généralement quelconques, il est clair que le total d'unités de même sens, en nombres a et b, contient *autant d'unités de ce sens* que l'indique la somme arithmétique de a et b, et qu'ainsi l'on a, selon que ces unités sont positives ou négatives :

$$(+ a) + (+ b) = + (a + b) \qquad (1)$$
$$(- a) + (- b) = - (a + b) \qquad (2)$$

De plus, il est incontestable que si les unités des additifs sont de directions opposées, le total renferme, en dernière analyse, autant d'unités que l'indique la différence arithmétique des *nombres* a et b; seulement cette différence a le même sens, et par conséquent le même signe, que celui du plus grand de ces nombres. On a dès lors :

$$(-a) + (+b) = \begin{cases} -(a-b), \text{ si } a > b & (3) \\ +(b-a), \text{ si } a < b & (4) \end{cases}$$

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} +(a-b), \text{ si } a > b & (5) \\ -(b-a), \text{ si } a < b & (6) \end{cases}$$

Les résultats (1), (2), (3), (4), (5), (6) établissent ces règles :

1° *Deux additifs de mêmes signes donnent ce signe à leur total.*

2° *De deux additifs de signes différents, le plus grand communique son signe au total.*

13. *Remarque.* — Lorsque les additifs sont de mêmes signes comme dans (1) et (2), le signe + d'addition ne fait que *maintenir* la génération positive ou négative déjà existante.

14. *Addition des polynomes.* Soit l'opération

$$(a+b-c)+(p-q+r)$$

Le total devant contenir autant d'unités de chaque espèce, ou de chaque direction, qu'il s'en trouve dans les divers termes de chacun des additifs il est clair que le rôle de l'un quelconque de ces termes persiste au total commun dans l'additif dont ce terme fait partie; la *composition* de la somme demandée sera donc :

$$a+b-c+p-q+r$$

De là on conclut cette règle :

Pour ajouter des polynomes, il faut les écrire les uns à la suite des autres, en conservant les signes de tous leurs termes.

15. Par suite de la considération d'unités de sens différents on se convaincra, avec une égale facilité, que l'*on peut changer à volonté l'ordre des termes d'un polynome :* en effet quel que soit l'ordre des termes on a toujours finalement à combiner la même somme d'unités positives et le même nombre d'unités négatives, c'est-à-dire que l'on se trouve ramené à l'un des quatre cas étudiés à l'occasion de la règle des signes de l'addition des monomes.

16. *Réduction des termes semblables.* — L'interversion possible des termes d'un polynome, permet le rapprochement des *termes semblables* que pourrait contenir ce polynome, ainsi que la disposition de ces termes semblables en deux séries l'une positive et l'autre négative.

Soit par exemple l'addition

$$(3a^2 - ab + 5c) + (5a^2 + 7ab + c) + (-4a^2 - 5ab - 8c)$$

dont la somme s'obtient d'après la règle (n° 25) en exécutant les additions et les soustractions que comporte l'indication

$$3a^2 - ab + 5c + 5a^2 + 7ab + c - 4a^2 - 5ab - 8c$$

On peut, en intervertissant l'ordre des termes, écrire par rapprochement des termes semblables de mêmes signes :

$$3a^2 + 5a^2 - 4a^2 + 7ab - ab - 5ab + 5c + c - 8c$$

Or de la même manière qu'en arithmétique 3 unités et 5 unités font 8 unités, on dira que $3a^2$ et $5a^2$ font $8a^2$; par suite, et d'une manière analogue, on obtiendra, en réunissant séparément les termes semblables positifs et les termes semblables négatifs,

$$8a^2 - 4a^2 + 7\,ab - 6\,ab + 6c - 8\,c$$

La règle de Descartes, qui permet de combiner alors des générations de sens contraires, c'est-à-dire *qui décompose en réalité les résultats obtenus par une seule et unique direction,* fournit

$$4a^2 + ab - 2c$$

On peut donc dire que :

Pour réduire des termes semblables il faut faire, d'une part la somme des coefficients positifs, et d'autre part la somme des coefficients négatifs; puis, soustraire la plus petite de ces sommes de la plus grande, en donnant au reste le signe de la plus grande, pour le qualifier ensuite des lettres et des exposants qui appartiennent aux termes entre lesquels on opère la réduction.

III.

DE LA MULTIPLICATION.

—

Règle des signes, pour deux ou plusieurs facteurs. — Formation ou multiplication des puissances d'une même lettre. — Produits d'un polynome par un monome positif ou négatif. — Produits de deux polynomes. — Irréductibilité des produits de certains termes des facteurs.

17. Cette opération s'indique en plaçant les deux facteurs, renfermés chacun entre parenthèses, de manière que le multiplicateur soit à droite.

Règle des signes. Les quatre cas suivants sont à considérer :

$$(+a)\ (+b)$$
$$(-a)\ (+b)$$
$$(+a)\ (-b)$$
$$(-a)\ (-b)$$

Quant aux deux premiers, on se rappellera la définition arithmétique de l'opération.

Le produit se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité, et dès lors puisqu'ici le multiplicateur $+\ b$ s'obtient par l'addition successive de b unités, le produit résultera de l'addition de b quantités égales à $+a$, dans le premier cas, et de b quantités égales à $-a$ dans le second; comme on a chaque fois ainsi à additionner des quantités de mêmes signes, les sommes (nº 12, 1re règle de signes) sont positives ou négatives en même temps que le multiplicande.

On aura donc, puisque les valeurs numériques de ces sommes sont égales à ab,

$$(+a)\ (+b) = +ab \qquad (1)$$
$$(-a)\ (+b) = -ab \qquad (2)$$

Le *multiplicateur positif indiquant* A PRIORI *la persistance d'une direction ou d'une génération préexistante,* (nº 15) il est clair qu'*un mul-*

tiplicateur négatif impose le RENVERSEMENT *de cette direction*, manifestée dans le multiplicande, et fournit ainsi des résultats de *sens* ou de *signes contraires* à ceux qui ont été obtenus avec un multiplicateur positif : il s'en suit évidemment que les troisième et quatrième cas donneront respectivement, mais aux signes près, les mêmes produits que les premier et deuxième ; et l'on aura,

$$(+a)\,(-b) = -ab \qquad (3)$$

$$(-a)\,(-b) = +ab \qquad (4)$$

Remarquant que les relations (1) et (4), dans lesquelles ab est positif, ont des facteurs de mêmes signes, tandis que (2) et (3), dont ab est négatif, ont des facteurs de signes différents, on pourra énoncer la règle :

Un produit de deux facteurs est positif ou négatif selon que ces facteurs sont de mêmes signes ou de signes contraires.

18. Le produit (1) de plusieurs facteurs se forme en multipliant d'abord les deux premiers, puis le résultat obtenu par le troisième, le nouveau résultat par le quatrième facteur, et ainsi de suite de proche en proche. Etablissons que ,

THÉORÈME I. *Le signe du produit d'un nombre quelconque de facteurs est indépendant de l'ordre des facteurs.*

Démonstration. Soit un produit P composé d'autant de facteurs que l'on veut, et supposons qu'on le multiplie par un nouveau facteur k, pouvant être positif ou négatif : il s'agit de prouver que le signe du produit Pk résultera aussi de l'introduction de k entre deux facteurs consécutifs quelconques de P.

Représentons par p' et p'' les deux portions de P entre lesquelles cette introduction a lieu, c'est-à-dire soit

$$P = p' \, . \, p''$$

Multipliant de part et d'autre par k il viendra,

$$P(k) \quad \text{et} \quad p'(k) \, . \, p''$$

Si k est *positif*, p' et $p'(k)$ sont de mêmes signes, tandis que si k est *négatif* p' et $p'(k)$ sont de signes différents ; il s'en suit que $p'(k) . \, p''$ et $p' \, . \, p''$ seront de mêmes signes ou de signes contraires selon que k est positif ou négatif : or k influant évidemment aussi de la même manière entre P(k) et P, il est clair qu'en intro-

(1) Voir notre *Arithmétique*, n° 56.

duisant le facteur k à une place quelconque dans le produit P on parvient au même signe pour le produit P (k) *c. q. f. d.*

19. Théorème II. — ***Le produit d'un nombre quelconque de facteurs est positif ou négatif selon que les facteurs négatifs sont en nombre pair ou impair.***

Démonstration. Puisque l'ordre des facteurs n'influe pas sur le signe du produit, il est permis de *rapprocher* d'une part les signes +, ainsi que d'autre part les signes —, de manière à obtenir la succession suivante de signes entre les divers facteurs d'un produit P,

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots+\times-\cdot-\cdot-\cdot-\cdots\cdots \qquad (1)$$

La série positive, située à gauche de la croix de multiplication, donne à son produit le signe +; quant à la série négative, elle pourra se subdiviser en groupes consécutifs de 2 signes, et prendre la forme

$$-\cdot-\times-\cdot-\times-\cdot-\times-\cdot-\times\cdots\cdots \qquad (2)$$

Il est à remarquer que le *dernier groupe à droite est complet ou incomplet* c'est-à-dire contient 2 ou 1 signe selon que les facteurs négatifs sont en nombre pair ou impair; chaque groupe tel que (—·—) donne un produit positif, et la série (2) se transforme ainsi dans l'une des deux,

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdot+ \qquad (3)$$

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdot- \qquad (4)$$

dont la première appartient au cas où le dernier groupe de (2) est *complet*, et dont la seconde se présente lorsque ce dernier groupe est *incomplet;* or, par des multiplications de proche en proche, il est manifeste que le produit (3) est positif, tandis que (4) est négatif.

On voit donc que le produit P, qui avait donné lieu, par interversion de facteurs, à la série (1) conduit à multiplier ***un facteur positif*** par un terme qui est ***positif ou négatif, lorsque le nombre de facteurs négatif est pair ou impair;*** P a donc le même signe que ce terme. *c. q. f. d.*

20. Corollaire. I. — ***Toute puissance d'une quantité négative est positive ou négative, selon que le degré en est pair ou impair.***

En effet le degré indique alors le nombre de facteurs négatifs qui composent le produit.

21. Corollaire. II. — *Les diverses puissances de* (-1) *sont alternativement* (-1) *et* $(+1)$.

22. *Multiplication des puissances d'une même lettre.* Soit à effectuer le produit

$$a^m \cdot a^p$$

dans lequel nous supposerons que

1° m *et* p *sont entiers et positifs :* dans ce cas on pourra écrire, d'après la définition de l'exposant

$$a^m \times a^p = a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots \times a \cdot a \cdot a \cdot \ldots$$

Le produit qui forme le second membre renfermant à gauche du signe $\times$, m facteurs égaux à a et p facteurs à droite, contient évidemment $m+p$ facteurs ; d'où l'on voit que

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Le produit demandé se forme donc en donnant pour exposant à a *la somme des exposants des facteurs.*

2° m et p *sont entiers*, mais ils peuvent être négatifs simultanément, ou, l'un négatif et l'autre positif.

m et p étant tous les deux négatifs indiquent que a, devant être pris comme diviseur d'une part m fois et d'autre part p fois, est considéré $m+p$ fois par division, ce qui s'écrit $a^{-(m+p)}$, donc

$$a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-(m+p)}$$

ou bien encore (n° 9) :

$$a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-(m+p)} = \frac{1}{a^{m-p}}$$

L'exposant $-(m+p)$ est le total des exposants des facteurs.

Si l'un des exposants p par exemple est négatif, et que l'on ait l'opération

$$a^m \cdot a^{-p}$$

Il est clair que si $m > p$, le produit ne contiendra la quantité a comme *facteur* qu'autant qu'il y a d'unités contenues dans $m-p$, parce que chacun des p facteurs égaux à a, employés par division, disparait par suite d'un facteur correspondant contenu par multiplication dans a^m; pareillement on trouverait très aisément que si $m < p$, le produit ne renferme la

quantité a comme diviseur qu'autant de fois que $p - m$ contient d'unités. Dans ces deux derniers cas on aurait donc

$$a^m \cdot a^{-p} = a^{m-p} \quad , \text{ pour } m > p$$
$$a^m \cdot a^{-p} = a^{-(p-m)} \quad , \text{ pour } m < p$$

Les exposants $m - p$ et $-(p - m)$ sont encore les sommes algébriques (n° 23) des exposants des facteurs.

3° *m et p sont fractionnaires et de signes quelconques.*

Supposons pour un instant que l'on ait

$$m = \frac{k}{l}, \; p = \frac{k'}{l'}$$

c'est-à-dire, à effectuer le produit P, où k, l, k', l' sont des nombres entiers,

$$P = a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{k'}{l'}}$$

On peut évidemment écrire en réduisant les exposants au même dénominateur ll',

$$a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{k'}{l'}} = a^{\frac{kl'}{ll'}} \cdot a^{\frac{k'l}{ll'}}$$

ou

$$P = a^{\frac{1}{ll'}kl'} \cdot a^{\frac{1}{ll'}k'l}$$

Nous savons que pour élever une quantité à une puissance de degré donné il faut en multiplier l'exposant par le degré; nous pouvons donc considérer les facteurs

$$a^{\frac{1}{ll'}kl'} \quad \text{et} \quad a^{\frac{1}{ll'}\cdot k'l}$$

comme les puissances de degrés kl' et $k'l$ d'une même quantité $a^{\frac{1}{ll'}}$ qui, représentée par b, donnera,

$$P = b^{kl'} \cdot b^{k'l}$$

Ramenés, comme on le voit par cette égalité, au 1° ou au 2°, selon que kl' et $k'l$ sont positifs ou négatifs, nous pouvons écrire

$$P = b^{kl'+k'l}$$

Cette dernière quantité étant une puissance de b prend la forme (n° 10) :

$$P = a^{\frac{1}{ll'}(kl'+k'l)} = a^{\frac{kl'+k'l}{l'}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}}$$

ce qui prouve que l'exposant du produit cherché est encore la somme des degrés des puissances facteurs.

Énonçons donc cette règle générale :

Pour multiplier des puissances d'une même lettre, écrivez cette lettre une seule fois au produit en lui donnant pour exposant la somme algébrique des exposants qu'elle a dans les facteurs.

23. *Multiplication des monomes.* Soit à effectuer la multiplication

$$(-\frac{5}{2}h^4l^{11}x)(+\frac{3}{2}h^{-7}l^{-9})(-7\,h^{-2}l^{+6}x^{\frac{3}{4}})(-h^{-1}l^{-2}x^{-\frac{1}{5}})$$

Dans une semblable opération on ne s'inquiète nullement des signes +, et l'on compte simplement les facteurs négatifs; le nombre que l'on obtient étant pair ou impair, on a vu (n° 19) que le signe du produit est positif dans le premier cas, et négatif dans le second : ici donc le résultat demandé est négatif, parce que le nombre 3 de facteurs négatifs est un nombre impair.

Cela étant il ne nous reste plus qu'à rapprocher, par multiplication, d'une part les facteurs numériques, c'est-à-dire les coefficients, et d'autre part les puissances d'une même lettre; le produit négatif P donnera donc lieu à,

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot 1\times h^4\cdot h^{-7}\cdot h^{-2}\cdot h^{-1}\times l^{11}\cdot l^{-9}\cdot l^{+6}\cdot l^{-2}\times x\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}$$

La multiplication des puissances d'une même quantité exigeant l'addition des exposants, il viendra ;

$$P = -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot 1\times h^{4-7-2-1}\times l^{11-9+6-2}\times x^{1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}}$$

d'où, en exécutant les opérations indiquées, et en s'appuyant sur la règle d'addition (n° 23),

$$P = -\frac{105}{4}h^{-6}l^{+6}x^{-\frac{1}{20}}$$

que l'on pourrait encore écrire

$$P = -\frac{105}{4}\frac{l^6}{h^6\sqrt[20]{x}}$$

RÈGLE. ***Le produit d'un nombre quelconque de monomes a pour coefficient le produit des coefficients des facteurs; il contient chaque lettre non commune avec l'exposant propre à cette lettre, et chaque lettre commune avec un exposant égal à la somme*** ALGÉBRIQUE ***des exposants dans les divers facteurs qui la renferment : le signe du produit est positif ou négatif, selon que le nombre de facteurs négatifs est pair ou impair.***

24. *Multiplication d'un polynome par un monome.*

Deux cas peuvent se présenter.

1er CAS. *Le multiplicateur est* POSITIF. Soit le polynome $a - b + c$, donnant lieu par le multiplicateur $(+m)$ au produit,

$$P = (a - b + c)\ (+m)$$

D'après la définition de l'opération, le produit P s'obtiendra en exécutant sur le multiplicande $a - b + c$, toutes les opérations que l'on doit faire sur l'unité pour former le multiplicateur; or comme l'addition successive de l'unité fournit $(+m)$, c'est aussi en additionnant un certain nombre d'additifs égaux au multiplicande, que l'on parviendra au produit ; on peut donc écrire, parallèlement l'une à l'autre les deux séries d'opérations suivantes :

$$\begin{array}{cc} +1 & a - b + c \\ +1 & a - b + c \\ +1 & a - b + c \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \hline +m & am - bm + cm \end{array}$$

Puisque (n° 12) des additifs de mêmes signes donnent ce signe à leur total, il est clair que les sommes, exécutées en colonnes verticales, auront respectivement ***les mêmes signes que les termes correspondants du polynome.***

2ᵉ Cas. *Le multiplicateur est* négatif. Soit à effectuer

$$P = (a - b + c)\ (-m)$$

Ici le multiplicateur $(-m)$ étant de génération contraire au multiplicateur $(+m)$ du cas précédent, il faudra additionner des unités de signes $-$ pour former $(-m)$; ensuite, et chaque fois que l'on renverse ainsi la génération, ou la direction de l'unité, il faut renverser la génération du multiplicande *en changeant la direction ou le signe de chaque terme;* on donnera ainsi lieu aux additions

$$\begin{array}{c|c}
-1 & -a + b - c \\
-1 & -a + b - c \\
-1 & -a + b - c \\
. & . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \\
\hline
-m & -am + bm - cm
\end{array}$$

Remarquons que les signes du multiplicande sont respectivement contraires de ceux des termes du total, et, par rapprochement des deux cas que nous venons d'étudier, nous formulons cette règle :

Pour faire le produit d'un polynome par un monome, multipliez, en faisant d'abord abstraction des signes, chaque terme du multiplicande par le multiplicateur; ensuite dans les différents produits ainsi obtenus, conservez ou changez les signes du multiplicande, selon que le multiplicateur est positif ou négatif.

23. *Multiplication des polynomes.* — Soit la multiplication de polynomes,

$$(a+b-c)\ (p-q+r)$$

Puisque le multiplicateur s'obtient en considérant successivement l'unité, p fois par addition, q fois par soustraction, et enfin r fois encore par addition, il faudra, conformément à la définition générale de la multiplication, exécuter, dans le même ordre, les mêmes opérations sur le multiplicande; on aura ainsi

$$P = (a+b-c)\,p - (a+b-c)\,q + (a+b-c)\,r$$

De là on déduit cette règle : *Pour obtenir le produit de deux polynomes, multipliez successivement le multiplicande par cha-*

que terme du multiplicateur, en ayant soin de conserver ou de changer tous les signes du multiplicande, selon que le terme multiplicateur est positif ou négatif; la somme des produits partiels ainsi obtenus est le produit cherché.

Avant d'effectuer la multiplication il est convenable, pour la facilité et pour la régularité des calculs, d'*ordonner* les polynomes; dans le cours des opérations on devra avoir soin de placer les termes semblables les uns en-dessous des autres, en colonnes verticales, de manière à permettre sans erreur, la réduction des termes semblables ainsi disposés.

26. Lorsque les deux facteurs sont ordonnés de la même manière, c'est-à-dire lorsque le multiplicande et le multiplicateur ont simultanément l'ordonnance croissante ou décroissante, par rapport à la même lettre, il est évident que le produit des deux polynomes s'ordonne aussi dans le même sens pour la même lettre.

Remarquons de plus que :

1° *Les produits du* PREMIER *terme du multiplicande par le* PREMIER *terme du multiplicateur;* 2° *du* DERNIER *terme du multiplicande, par le* DERNIER *terme du multiplicateur, sont uniques de leurs espèces respectives*; 3° que ces produits, qui ne peuvent se combiner dès lors avec d'autres termes qui leur soient semblables, sont contenus SANS RÉDUCTION dans le produit des deux polynomes.

En effet si l'ordonnance est ascendante, le produit des premiers termes donne lieu à la plus faible puissance de la lettre ordonnatrice dont on ajoute les plus petits exposants du multiplicande et du multiplicateur, ce qui fournit nécessairement la plus petite somme possible; le produit des derniers termes constitue, au contraire, la plus haute puissance de la lettre principale, puisque, pour former ce produit, on additionne les plus hauts exposants de cette lettre, et qu'aucune autre somme de deux exposants pris dans les deux facteurs ne peut atteindre le degré ainsi fourni.

Cette remarque est générale et s'applique évidemment aussi à *des exposants fractionnaires et de signes quelconques*, dès que les facteurs sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre; elle nous permettra de donner plus tard, à la théorie de la division, toute l'extension immédiate dont elle est susceptible *à priori*.

IV.

DE LA SOUSTRACTION.

—

Règle des signes. — Soustraction de deux quantités algébriques quelconques, établie à priori et par décomposition.

27. La composition et la décomposition des quantités sont la consécration analytique de la *conservation* et du *changement* des générations diverses des unités combinées; après avoir déjà dit que l'addition *maintient* les directions préexistantes, nous disons ici que la *soustraction renverse ces directions;* d'ailleurs le principe de Descartes, pris dans sa complète signification, prouve que ce renversement se traduit analytiquement par un changement de signes.

De là résulte que :

La soustraction change, par génération, le signe de la quantité à soustraire.

En symbolisant cette loi, ou *règle de signes*, on obtient :

$$(+a) - (+b) = + a - b$$
$$(-a) - (+b) = - a - b$$
$$(+a) - (-b) = + a + b$$
$$(-a) - (-b) = - a + b$$

28. Cette règle exige nécessairement que le changement de signes ait lieu par *voie générative*, c'est-à-dire que le renversement de directions doit être effectué sur chacune des parties, ou termes, de la quantité à soustraire : c'est seulement ainsi que la génération primitive peut être suivie et changée à chaque instant.

Dès-lors, d'une manière plus explicite, on dira en parlant des polynomes :

Pour faire une soustraction il faut au préalable, changer les signes du diminueur que l'on écrit, ainsi changé, à la suite du diminuende.

D'après cela, on aura généralement :

$$(a+b-c)-(-p+q-r)=a+b-c+p-q+r$$

29. On pourrait *matérialiser*, si l'on peut s'exprimer ainsi, les deux règles précédentes :

1° Quant au premier cas de la règle des signes, le diminuende peut se mettre sous la forme

$$\begin{array}{r} +a-b \\ +b \end{array}$$

Et l'on voit dès-lors que $+b$ étant partie constitutive de la quantité dont on doit soustraire, il suffit, pour opérer la soustraction, de *supprimer* ou de *ne plus considérer cette partie*, pour avoir immédiatement,

$$(+a)-(+b)=+a-b$$

Pour les trois autres cas, le diminuende prend les formes respectives

$$\begin{array}{rrr} -a-b, & +a+b, & -a+b \\ +b & -b & -b \end{array}$$

et la *suppression* du diminueur, écrit sur la seconde ligne, fournit les restes

$$-a-b, \quad +a+b, \quad -a+b$$

2° Quant à la soustraction des polynomes (n°28), on aurait, de la même manière,

$$\begin{array}{r} a+b-c+p-q+r \\ -p+q-r \end{array}$$

Ce nouveau polynome étant maintenant celui dont on doit soustraire, et $-p+q-r$ étant devenu l'une des parties constitutives de ce polynome, le reste sera l'ensemble des autres parties, ou

$$a+b-p+c-q+r.$$

Remarque. Ces deux nouvelles et dernières démonstrations sont simples et très-faciles à saisir, mais elles sont loin de remonter à la signification de l'opération de soustraction, considérée au point de vue de l'*essence propre directive ou générative des grandeurs.*

V.

DE LA DIVISION

—

I.

Règle des signes. — Division des puissances d'une même lettre. — Division des monomes. — Division d'un polynome par un monome. — Division des polynomes. — Reste nul. — Vraie signification de l'expression *division impossible*.

30. *Règle de signes.* — Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient *complet*, il est clair que si les termes de la division ont mêmes signes ou mêmes *directions*, il faut *maintenir* dans le quotient la direction ou le signe du diviseur : le maintien d'une direction quelconque, s'exprimant à l'aide du signe $+$, on aura

$$\frac{+}{+} = + \quad et \quad \frac{-}{-} = +$$

Au contraire si les termes de la division sont de signes ou de directions différentes, la composition du dividende au moyen du diviseur ne peut se faire que par un changement de signes ou de génération ; d'où l'on voit que

$$\frac{+}{-} = - \quad et \quad \frac{-}{+} = -$$

De là cette règle : *Un quotient est positif ou négatif selon que ses termes sont de mêmes signes ou de signes contraires.*

31. *Division des puissances d'une même lettre.* — Soit en général

$$a^m : a^p$$

1° m et p étant entiers, il pourra se faire que m soit plus grand ou plus petit que p; dans le premier cas il est évident que tous les diviseurs égaux à a disparaissent *par* AUTANT *de*

facteurs introduits, et qu'ainsi il ne reste plus au quotient que $m-p$ facteurs égaux à a; dans le second cas les facteurs a du dividende sont détruits par un nombre égal de diviseurs a, de telle sorte que le quotient renfermera $p-m$ diviseurs.

On aura donc, puisque l'*exposant négatif indique la quotité des diviseurs égaux à une même quantité*,

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad , \text{ pour } m > p$$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{-(p-m)} = a^{m-p}, \text{ pour } m < p$$

$m-p$ est donc l'exposant du quotient, et selon qu'il sera positif ou négatif la lettre a jouera le rôle de facteur ou de diviseur; ou peut, dès lors, en tenant compte du signe de cette différence, appliquer un même énoncé aux résultats de formes identiques de ces divisions et dire :

Le quotient de deux puissances d'une même lettre est une puissance de cette lettre, ayant pour degré la différence algébrique de l'exposant du diviseur à l'exposant du dividende.

2° Si $m = p$, nous avons déjà vu (n° 11), que

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^0$$

Et il est clair que la forme a^0 n'est qu'un cas particulier de $m \gtrless p$.

3° En supposant m et p fractionnaires, positifs ou négatifs, soient

$$m = \frac{k}{l} \text{ et } p = \frac{k'}{l'}$$

Par la réduction de ces fractions au même dénominateur ll', on pourra écrire

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = \frac{a^{\frac{kl'}{ll'}}}{a^{\frac{k'l}{ll'}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{ll'}}\right)^{kl'}}{\left(a^{\frac{1}{ll'}}\right)^{k'l}}$$

Représentant pour un instant par b la puissance placée entre parenthèses, il viendra

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = \frac{b^{kl'}}{b^{k'l}}$$

Les exposants kl' et $k'l$ étant maintenant entiers, on peut appliquer la règle établie pour ce cas, et obtenir

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = b^{kl'-k'l}$$

ou, en remplaçant b par sa valeur,

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = a^{\frac{kl'-k'l}{ll'}} = a^{\frac{k}{l}-\frac{k'}{l'}}$$

Ce résultat maintient donc la règle établie dans le cas des exposants entiers quelconques.

31. *Division des monomes.* — Le quotient de deux monomes ne peut évidemment être qu'un *monome*, puisque son produit par le diviseur est monome, et égal au dividende.

L'interversion étant permise entre les facteurs de chacun des termes de la division, on pourra rapprocher les puissances des lettres communes; quant aux lettres non communes, le quotient les contiendra avec l'exposant qui leur appartient, maintenu ou changé de signe, suivant que cette lettre fait partie du dividende ou du diviseur.

Ainsi si c^m fait partie du dividende, et non du diviseur, le quotient admettra le facteur c^m; tandis que *si d^k entre seulement dans la composition du diviseur, le quotient recevra comme facteur d^{-k}.*

En effet, pour c^m il faut que l'on ait, après l'introduction de c^0 ou 1 dans le diviseur, et en représentant par x l'exposant de c dans le quotient :

$$c^x \, . \, c^0 = c^m$$

d'où

$$x + o = m, \quad et \quad x = m$$

De même, par suite d'un diviseur renfermant d^k, si l'on désigne par y l'exposant de d au quotient, et que l'on introduise d^0 ou 1 dans le dividende, nous devons avoir

$$d^k \, . \, d^y = d^0$$

d'où

$$k + y = o, \quad et \quad y = -k \qquad c. q. f. d.$$

On a donc cette règle :

Le quotient de deux monomes est positif ou négatif selon que les signes de ces monomes sont les mêmes, ou différents ; son coefficient est le quotient du coefficient du dividende par le coefficient du diviseur ; lorsqu'une lettre est COMMUNE *aux deux monomes, elle figure au quotient avec un exposant égal à l'excès* ALGÉBRIQUE *de l'exposant du dividende sur l'exposant du diviseur ; lorsqu'une lettre a le même exposant dans les deux termes à diviser, on ne l'écrit pas au quotient ; lorsqu'une lettre n'entre que dans un des monomes, on l'écrit au quotient avec l'exposant qu'elle possédait, maintenu ou changé de signe suivant que cette lettre se trouve dans le dividende ou dans le diviseur.*

Remarque. — Il est presqu'inutile de rappeler que toute quantité, qui, dans le quotient, aura un exposant négatif, peut passer en dénominateur en changeant le signe de cet exposant, en vertu de la transformation autorisée (n°7), par suite de l'extension donnée à la définition de l'exposant.

32. *Division d'un polynome par un monome.* — Soit la division

$$\frac{a-b+c+d-f}{m}$$

dans laquelle le diviseur est quelconque et dont le dividende, ne renfermant pas de termes semblables, est ordonné, s'il y a lieu, par rapport à une certaine lettre.

Il est évident que le quotient est un polynome, que nous représenterons, sans rien préjuger sur la valeur ou sur les signes de ses divers termes, par

$$p+q+r+s+t$$

On doit avoir

$$a-b+c+d-f=(p+q+r+s+t)m$$

D'où

$$a-b+c+d-f=pm+qm+rm+sm+tm.$$

Comme les termes du polynome proposé diffèrent tous les uns des autres, cette égalité exige que chacun de ses termes ait son égal dans le polynome $pm+qm+rm+sm+tm$; posons donc simultanément, en supposant que le quotient soit ordonné par rapport à la même lettre que le dividende,

$$pm=+a,\ qm=-b,\ rm=+c,\ sm=+d,\ tm=-f$$

d'où

$$p = +\frac{a}{m},\ q = -\frac{b}{m},\ r = +\frac{c}{m},\ s = +\frac{d}{m},\ t = -\frac{f}{m}$$

Si m était négatif, il viendrait, d'une manière analogue,

$$p = -\frac{a}{m},\ q = +\frac{b}{m},\ r = -\frac{c}{m},\ s = -\frac{d}{m},\ t = +\frac{f}{m}$$

On voit donc que:

Pour diviser un polynome par un monome, il faut d'abord, en faisant abstraction des signes, diviser successivement chaque terme du dividende par le diviseur, puis maintenir ou changer les divers signes du dividende selon que le diviseur est positif ou négatif.

33. *Division des polynomes.* — Revenons un instant sur la propriété (n° 26), et considérons une multiplication ordonnée *dans le cas où l'un des facteurs est,* DANS L'AUTRE, *le dénominateur de certains termes, dont aucun ne contient la lettre ordonnatrice avec un exposant égal à la* SOMME ALGÉBRIQUE *des degrés du premier terme du multiplicande et du premier terme du multiplicateur.*

Soit ainsi, suivant ordonnance *décroissante*, l'opération

$$\left(\frac{5}{2}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{33}{8} + \frac{\frac{75}{8}}{2a-3}\right)\quad(2a-3)$$

Dans ce cas de multiplication, le seul produit partiel monome irréductible est *nécessairement*

$$\left(\frac{5}{2}a^2\right)\ (2a)$$

tandis que le produit de puissance la plus petite de a est, ou peut être *altéré* par suite de

$$\left(\frac{\frac{75}{8}}{2a-3}\right)\ (2a-3)$$

Une remarque analogue est à faire lorsqu'on adopte l'ordonnance croissante, comme pour l'opération

$$\left(1 - \frac{10}{3}a + \frac{1}{9}a^2 + \frac{\frac{25}{9}a^3}{-3+2a}\right)\quad(-3+2a)$$

34. La *valeur* d'un produit étant évidemment indépendante

de l'ordonnance adoptée dans la multiplication, faisons comprendre, qu'en se plaçant à un point de vue complètement général, *la* FORME *du quotient de deux polynomes peut être profondément modifiée par le* RENVERSEMENT *d'ordonnance de ces polynomes.*

Soit donc le même quotient, soumis à des ordonnances opposées.

$$q = \frac{3a^3 - 7a^2 + 12a - 3}{2a - 3}$$

$$q' = \frac{-3 + 12a - 7a^2 + 3a^3}{-3 + 2a}$$

En supposant que q et q' sont dans le cas spécial de multiplication, signalé au numéro précédent, on admet

Pour q , $3a^3 = (2a) \times$ 1er *terme de* q

Pour q' , $-3 = (-3) \times$ 1er *terme de* q'

Aucune de ces deux relations n'est la conséquence de l'autre : en principe, elles existent *séparément* et en vertu d'*hypothèses également admissibles ;* de telle sorte que rien ne peut permettre de dire que le premier terme de q se trouvera dans q', ni de prévoir l'identité qui se présente quelquefois entre q et q'.

Il est donc clair qu'en général *les quotients* que l'on obtiendra par des ordonnances inverses, *seront de formes différentes.*

33. Sans admettre l'ordre ascendant plutôt que l'ordre descendant, soient actuellement les deux polynomes P et D, *ordonnés de la même manière* par rapport à la même lettre commune x.

$$P = \textit{Dividende} = Ax^m + Bx^{m'} + Cx^{m''} + \cdots\cdots$$

$$D = \textit{Diviseur} = ax^n + bx^{n'} + cx^{n''} + \cdots\cdots$$

Il s'agit de trouver un polynome Q appelé quotient, qui, multiplié par le diviseur, donne le dividende pour produit.

Le polynome Q qui, sous la forme la plus complète, renferme une partie fractionnaire dont le numérateur satisfait à la condition (n° 33), peut toujours être supposé ordonné, quant à x, dans le même ordre que P et D ; représentons-le par

$$Q = \textit{Quotient} = A'x^p + B'x^{p'} + C'x^{p''} + \cdots\cdots$$

Dès lors, nous savons que dans ce cas, comme au n° 26, le premier terme de P est le produit du premier terme de D par le premier terme de Q, c'est-à-dire que

$$A'x^p \cdot ax^n = Ax^m$$

D'où l'on déduit

$$A'x^p = \frac{Ax^m}{ax^n}$$

On voit donc que *le premier terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

Le dividende étant la somme des produits partiels du diviseur par chacun des termes du quotient, et par la fraction *dont le type général a été défini* et qui peut affecter Q, on pourra effectuer le produit

$$D \cdot A'x^p$$

du diviseur par le premier terme, actuellement *déterminé*, du quotient; ce produit étant ensuite retranché de P on obtiendra *un reste P′ qui n'est autre chose que la somme des produits partiels du diviseur par les diverses parties encore inconnues du quotient.*

Ce reste constitue donc un nouveau dividende sur lequel nous aurons à raisonner comme sur le polynome P, de telle façon qu'en divisant le premier terme de P′ par le premier terme de D, on aura le second terme du quotient demandé.

De ce qui précède on déduit la règle suivante :

Pour diviser deux polynomes, ordonnez-les de la même manière par rapport à une même lettre commune. Divisez le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le résultat sera le premier terme du quotient. Retranchez du dividende le produit du diviseur par ce terme, en maintenant l'ordonnance du reste, par rapport à la lettre ordonnatrice choisie pour les polynomes proposés. Divisez le premier terme du reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le second terme du quotient. Retranchez du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient, et divisez le premier terme du nouveau reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le troisième terme du quotient. Ainsi de suite.

Convenons de considérer comme *dernier terme du quotient celui dont la lettre ordonnatrice a pour degré la différence algébrique, pour cette même lettre, de l'exposant du dernier terme du diviseur à l'exposant du dernier terme du dividende* : il est clair, qu'en général, la division pourrait cependant se continuer au-delà de ce *dernier terme conventionnel;* mais on introduirait ainsi dans le quotient des termes dont les degrés, ajoutés à ceux du diviseur, ne seraient pas renfermés dans le dividende, et cette introduction, qui n'aurait souvent aucune utilité immédiate, transformerait le quotient en une série illimitée.

Le dernier terme du quotient donne ainsi lieu à un reste R, égal nécessairement au produit du diviseur par la fraction complémentaire du quotient; cette fraction est donc $\frac{R}{D}$.

Si R est *nul*, le diviseur n'entre pas dans le quotient comme dénominateur; dès lors, l'ordonnance commune, faite dans un sens ou dans l'autre, est sans influence sur la forme du quotient, attendu que la propriété (n° 26) reçoit son entière application, tant pour le premier que pour le dernier terme du dividende.

36. On a l'habitude de dire qu'*une division algébrique est ou n'est pas possible*. Cherchons à donner à cette expression *inutile et nullement nécessaire*, le seul sens que la théorie, exposée précédemment, puisse accepter.

Nous avons défini (n° 35) ce que l'on entend par *dernier terme d'un quotient :* dans le cas où le reste, fourni par ce dernier terme, n'est pas nul, on a dit jusqu'à présent que *la division est impossible ;* mais il vaut mieux dire plus simplement, avec rigueur et sans être plus long, que *zéro* n'est pas le *dernier reste.*

Il est une autre erreur que nous voulons relever ici, et dont tous les auteurs se sont rendus coupables : d'après les errements ordinaires, on prétend que la division

$$\frac{x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 23x^2 + 27x - 20}{x^3 - 3x^2 + 5x}$$

est IMPOSSIBLE, parce que le dernier terme 20 du dividende n'est pas divisible par le dernier terme $5x$ du diviseur. Ce-

pendant cette division, ***très-possible***, donne

$$x^2 - 2x + 3 - 4x^{-1}$$

pour quotient et *zéro* pour reste. Cet exemple, choisi parmi tant d'autres, prouve combien il est indispensable de donner à la propriété (n° 26) toute la généralité et toute l'extension *nécessaires*, en y considérant les coefficients et les exposants de la lettre ordonnatrice, comme pouvant être *quelconques*, entiers, fractionnaires, positifs ou négatifs.

Nous avons déjà dit qu'une quantité algébrique est *entière*, lorsqu'étant d'ailleurs rationnelle, elle ne contient aucun dénominateur numérique ou littéral : à ce point de vue, on dit quelquefois qu'une quantité entière est ou n'est pas divisible par une autre, selon que le quotient de la première par la seconde est ou n'est pas une quantité entière; nous dirons plus correctement qu'une quantité entière est ou n'est pas *multiple* d'une autre, et cette expression aura l'avantage de pouvoir s'appliquer au cas où les termes de la division sont fractionnaires.

DEUXIÈME PARTIE.

ROTATION ANALYTIQUE

OU

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

—

I.

VRAIE SIGNIFICATION DU SYMBOLE $\sqrt{-1}$.

Deux modes généraux essentiels de génération des grandeurs; par translation, et par rotation. — Décomposition d'un mouvement angulaire quelconque en trois mouvements consécutifs, dont deux par translation successive et un par rotation normale. — Signe *i*, appelé improprement signe d'imaginarité; sa signification concrète. — Généralité spontanée et immédiate du signe $i = \sqrt{-1}$. — Symboles imaginaires de divers ordres ou de divers degrés; sens concret à attacher aux degrés pairs ou impairs de ces symboles.

37. Lorsque, pour concevoir la génération des grandeurs, on considère un point qui se meut, on reconnaît sans peine que ce point est SANS CESSE *soumis à deux influences ou à deux forces*, dont les actions, DÉTERMINÉES ET CONTINUES, s'exercent ainsi A CHAQUE INSTANT, et font décrire, par la combinaison de leurs effets, le lieu réellement parcouru, c'est-à-dire la *trajectoire* du point.

Dans ce mouvement, et à un instant quelconque, si les forces qui sollicitent le point continuaient leur action, *en persistant* dans la détermination qui leur est alors *particulière*, il

est clair que la trajectoire serait une *ligne droite*, c'est-à-dire le type d'un seul déplacement ou d'une seule direction conservée invariablement ; et c'est même, en vertu d'une semblable hypothèse implicite, que nous avons été amené à formuler, dans la première partie, ce grand principe propre à la TRANSLATION d'un point :

Sur une droite indéfinie, et à partir d'une origine fixe quelconque, toutes les longueurs qui sont comptées dans un sens sont qualifiées du signe +, *tandis que toutes celles qui sont comptées dans le sens contraire, sont qualifiées par le signe* —.

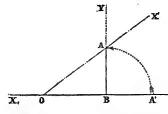
Mais ce n'est pas ainsi que les choses se passent en général, car le plus souvent les forces qui concourent au mouvement varient à chaque instant, suivant des lois *connues ou données :* il s'en suit que, pour passer de l'une à l'autre de deux positions consécutives, le point générateur doit, dans une direction déterminée passant par la première, et en vertu d'une force de translation, avancer d'une certaine quantité, tandis que *simultanément* il se meut d'une quantité angulaire *convenable*, en abandonnant la direction que la translation lui avait d'abord imposée.

Ce mouvement *angulaire* doit évidemment être regardé comme une ROTATION exécutée par le point mobile autour de chaque position qu'il acquiert.

L'étude approfondie des trajectoires curvilignes, ou des lignes courbes, étant du ressort de la Géométrie, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet, car il nous suffisait maintenant de constater qu'un point qui se meut est *simultanément* et *continuement* soumis à des effets de translation et de rotation : l'uniformité et la variation de ces actions, de nature si différentes, donnent lieu à toutes les espèces et à toutes les variétés de courbes possibles, tant planes que gauches.

38. Après avoir indiqué précédemment les *conventions de signes* qui appartiennent à la représentation analytique de la *génération par translation*, il est nécessaire de rechercher par quel *caractère* ou par quel *signe* on devra distinguer dans le calcul les éléments engendrés par *rotation :* en d'autres termes, il *s'agit actuellement de trouver le symbole analytique de la rotation*, et de compléter ainsi la correspondance immédiate qui doit, ou qui du moins devrait toujours, exister entre le concret et l'abstrait.

Considérons en général les droites OX et OX′ dont la première est l'axe de translation, avec origine O : c'est autour du point O que la rotation s'exécute et fournit, par exemple, la droite OX′, tandis que sur OX, l'on évalue les espaces parcourus par translation.



Menons la perpendiculaire quelconque AB à OX.

Il est évident que pour déterminer graphiquement le point A, il suffit de connaître OB et AB, en ayant soin toutefois de porter AB perpendiculairement à OB; on en conclut que la détermination *analytique* de ce point exige la représentation analytique des quantités OB et AB engendrées par *translation*, la première sur OX, la seconde suivant la *perpendiculaire* à cet axe.

Le passage, par voie angulaire, de la direction OX à la direction OX′ peut toujours être conçu comme produit successivement,

1° Par la description linéaire, selon OX à partir de O, d'une longueur arbitraire OB.

2° Par la description linéaire, suivant OX à partir du point B, d'une longueur

$$BA' = BA$$

dont la grandeur dépend à la fois de BO et de l'inclinaison des droites OX et OX′

3° Par la rotation de BA′ autour de B comme centre; ce dernier mouvement s'arrêtant lorsque le point A′ se trouve sur la perpendiculaire BY à OX.

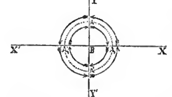
Ces trois mouvements doivent d'ailleurs se succéder dans l'ordre où ils viennent d'être indiqués.

Il est donc permis de conclure que :

La rotation angulaire quelconque se transforme en trois mouvements consécutifs, dont les deux premiers ont lieu par translation, et dont le dernier, qui s'accomplit par rotation, transporte perpendiculairement à l'axe, la longueur engendrée par le second mouvement.

39. Ce troisième mouvement, vulgairement appelé *quart de*

révolution, sera désormais désigné sous le nom de *mouvement de perpendicularité :*



Nous avons donc à étudier analytiquement le passage de l'une à l'autre des *directions perpendiculaires* XX' et YY'.

Remarquons d'abord que la perpendiculaire AB, menée à XX' par un point quelconque A de YY', passe par l'origine B de rotation; il en résulte la disparition du premier des trois mouvements que nous avons reconnus et définis généralement, pour le cas d'une rotation quelconque.

Quant à la longueur produite par le second mouvement de translation, il est clair qu'elle est égale à AB; prenons donc

$$BA_1 = BA$$

Et représentons BA_1 par $+a$. Puisque, suivant XX', la translation *effective* n'existe plus, et que la modification de BA_1, à l'aide des signes + et —, est impossible pour distinguer les longueurs *égales* BA_1 et BA, examinons si la *voie factorielle* ne .peut pas symboliser avec la perpendicularité de ces directions.

Désignons par i le facteur de $BA = +a$, nécessaire à cette transformation, qui donne ainsi

$$(+a)\, i = OB \qquad (1)$$

Or si l'on voulait, de la même manière, passer de BY à BX', on ferait

$$BA'_1 = BA_1 = -a$$

Et l'on aurait

$$(OB)\, i = -a \qquad (2)$$

La multiplication, membre à membre, des égalités (1) et (2) conduit à

$$i^2 = -1 \qquad (A)$$

40. *Forme de* i; *signification de* (A). — La signification, complète et si importante, de cette dernière relation étant restée inconnue jusqu'aujourd'hui, il est indispensable de la mettre en évidence, afin qu'étant ainsi établie *à priori*, elle puisse servir de *base* au calcul d'une classe spéciale d'expressions lit-

térales, dont l'introduction est due à la considération du mode de génération concrète par rotation.

Remarquons qu'en multipliant (1) par (2), et en écrivant

$$i \,.\, i = i^2$$

nous avons *de fait*, établi cette convention :

L'exposant s'applique à un signe, ou à un symbole, comme si ce signe était une quantité.

Est-ce à dire par là qu'il est permis de regarder i^2, et en général i^p, comme une puissance? Non certes, car cela serait aussi ABSURDE que d'admettre les différentes puissances des signes + et — ; et s'il n'est personne capable, pensons-nous, d'introduire dans le calcul la p^e puissance du signe — par exemple, il ne se trouvera aucune intelligence qui puisse concevoir la signification de la *p^e puissance d'un autre* SIGNE i : en effet, les opérations fondamentales s'exécutent sur des nombres, ou si l'on veut sur des rapports, et leur application aux signes de génération, *considérés* en eux-mêmes et *isolément*, ne présente aucun sens, et ne serait qu'une extravagance!

D'ailleurs i n'est pas, et ne peut pas être, une quantité ; car, s'il en était ainsi, sa présence comme *facteur* modifierait dans (1) la valeur de a, ce qui est impossible, puisque les valeurs absolues de BA_1 et de BA sont égales.

D'un autre côté si i avait quelque valeur, positive ou négative, et pouvait ainsi être autre chose qu'un *signe nouveau et nécessaire*, sa seconde puissance serait positive : la formule (A), dès lors inadmissible, INTERDIRAIT la considération et l'emploi de quantités dont il serait impossible d'admettre les combinaisons régulières.

i^2 n'ayant donc la *forme* d'une puissance que par suite d'une *simple* CONVENTION, il est évident, qu'en s'appuyant sur cette *forme*, on peut retourner à la *forme* de i, par le signe contraire de l'élévation au carré, c'est-à-dire par le signe $\sqrt{}$ d'extraction de racine carrée ; et, dès ce moment, le même retour pouvant avoir lieu, par rapport à (—1) qui, *comme signe*, est l'équivalent de i^2, on aura

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{(C)}$$

Tel est donc le signe nouveau, qui devrait être appelé *signe*

de perpendicularité ou *signe normal*, et qui improprement a reçu jusqu'aujourd'hui le nom de *symbole d'imaginarité*.

L'erreur dans laquelle on est resté avait porté des savants du premier ordre à dire que $\sqrt{-1}$ dénonçait l'impossibilité, et à placer, en dehors du domaine *réel*, les fonctions où $\sqrt{-1}$ se trouvait; ces savants, en méconnaissant ainsi l'origine et le sens du symbole $\sqrt{-1}$, introduisaient dans les calculs des fonctions qu'ils regardaient comme *chimériques*. Vainement et sans cesse on a objecté,

Mais si les quantités imaginaires sont chimériques et absurdes, comment est-il possible d'en faire un instrument CERTAIN *de calcul et d'investigation; et comment concevoir qu'en les soumettant,* SANS DÉMONSTRATION, *aux règles du calcul ordinaire, on parvienne souvent, et dans des cas toujours déterminés, à rentrer dans le domaine réel.*

On répondait avec un sérieux inconcevable :

« *Les expressions imaginaires sont des quantités vraiment* » *chimériques, absurdes en elles-mêmes; mais elles sont néan-* » *moins susceptibles de jouer un rôle dans les calculs algé-* » *briques, et même de manière à donner des résultats réels;* » *en effet, une expression imaginaire, multipliée par elle-même,* » *produit une expression réelle, etc., etc.* »

Il n'est pas besoin de faire remarquer ce qu'une pareille réponse a de valeur; elle montre assez, par son insuffisance, que le signe $\sqrt{-1}$ n'avait pas jusqu'alors reçu sa vraie signification.

41. Pour donner au symbole $\sqrt{-1}$ toute la généralité que l'on doit y rencontrer, pour faire en sorte qu'il distingue la rotation qui s'opère dans un sens ou dans l'autre, on le soumet à la grande loi de Descartes et l'on pose

$$i = +\sqrt{-1} \text{ et } i = -\sqrt{-1}, \text{ ou encore } i = \pm\sqrt{-1}$$

De cette manière $+\sqrt{-1}$ caractérise le mouvement angulaire de *droite à gauche*, tandis que $-\sqrt{-1}$ s'applique à celui qui s'accomplit de *gauche* à *droite*.

Conformément à la correspondance des oppositions de signes et de direction, nous pouvons conclure que la formule (A) est la traduction algébrique de cette vérité :

Deux mouvements de perpendicularité, consécutifs et de même direction, introduisent le renversement du sens primitif de translation.

De plus, pour considérer un plus grand nombre de *mouvements normaux*, et en supposant que $BA' = BA_1$, on pourrait, par un raisonnement analogue à celui qui a été employé (n° 39), poser

$$(BA_1)\ i = BA$$
$$(BA\ )\ i = BA_1'$$
$$(BA_1')\ i = BA'$$
$$(BA')\ i = BA_1$$

D'où par multiplication, membre à membre,

$$i^4 = 1 \qquad (B)$$

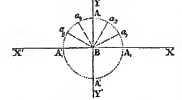
De la même manière on conçoit que l'on aurait en général, n étant un nombre entier quelconque,

$$i^{2n\ (2n+1)} = -1 \qquad (A')$$
$$i^{4n} = +1 \qquad (B')$$

Ces dernières formules symboliques, dans lesquelles i a la même signification que dans (A) prouvent analytiquement que :

Le sens primitif de translation est changé ou est maintenu, selon que l'on fait intervenir des mouvements de perpendicularité, en nombres simplement ou doublement pairs.

42. En établissant, sur l'axe de translation, le renversement de direction comme étant le résultat de deux mouvements normaux consécutifs, nous avons voulu saisir *analytiquement* le fait de la perpendicularité concrète; mais nous avons ainsi particularisé la rotation que nous allons considérer un peu plus généralement, en recourant à un nombre *pair* $2n$ de rotations uniformes, égales et consécutives



de BA_1, autour de l'origine B. Désignons par ϱ le *signe* factoriel qui, permettant de tenir compte à la fois de la position et de la grandeur, fournit successivement :

$$B\,a_1 = (+a \quad)\,\rho$$
$$B\,a_2 = (B\,a_1 \quad)\,\rho$$
$$\vdots$$
$$B\,a_n = B\,A = (B\,a_{n-1})\,\rho$$
$$\vdots$$
$$-a = B\,a_{2n} = BA'_1 = (B\,a_{2n-1})\,\rho$$

En multipliant membre à membre ces diverses égalités, il viendra, après simplifications,

$$-a = (+a)\,\rho^{2n}$$

D'où

$$\rho^{2n} = -1 \qquad (A_1)$$

Et pour passer de cette relation à

$$\rho = \sqrt[2n]{-1} \qquad (C_1)$$

il faudrait raisonner comme nous l'avons fait précédemment pour déduire C de A.

Remarquons que dans la multiplication qui fournit (A_1) on a

$$\rho^m = \rho^n\,\rho^n = -1 \quad \textit{ou} \quad (\rho^n)^2 = -1$$

D'où

$$\rho^n = \sqrt{-1}\,, \quad \textit{et} \quad \rho = \sqrt[n]{\sqrt{-1}} \qquad C_2$$

Cette dernière formule prouve qu'il y a des imaginaires qui correspondent à tous les degrés pairs, *et que la moitié de ce degré est le nombre de mouvements angulaires nécessaires à la détermination de la perpendicularité.*

Ainsi se trouve établie *à priori*, et indépendamment de toute spéculation et de tout artifice de calcul, la vraie signification des imaginaires *à indices quelconques* de la forme

$$\sqrt[2n]{-1}$$

42. Pour passer de $+ a$ à $- a$, nous n'avons employé un nombre pair $2n$ de rotations que dans le seul but d'obtenir et de définir analytiquement la perpendicularité.

Si l'on recourait à un nombre impair $2p + 1$ de rotations successives, on aurait encore, de la même manière que précédemment,

$$\varrho^{2p+1} = -1 \quad et \quad \varrho = \sqrt[2p+1]{-1}$$

Et dans ces formules, qui sont *symboliques* aux mêmes titres que les précédentes, on ne pourrait, en aucune façon, regarder -1 comme une quantité dont on aurait à extraire la racine.

On ne considère pas la rotation impaire, à cause de son peu d'utilité et de l'impossibilité où elle se trouve de fournir la notion analytique de perpendicularité.

Observation. Il est clair que si l'on employait un nombre impair $2p + 1$, de rotations angulaires, égales et successives, pour passer de $+ a$ à $- a$, on obtiendrait

$$\theta = \sqrt[2p+1]{-1}$$

Et dès-lors θ, en conservant toujours le caractère propre de symbole, ne pourrait plus fournir la rotation normale: c'est à cette forme que se rattachent,

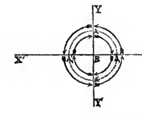
$$\sqrt[3]{-1}\ ,\ \sqrt[5]{-1}\ ,\ \sqrt[7]{-1}\ \ldots\ldots\ldots$$

II.

DE L'EXPRESSION $\sqrt{-1}$

—

Combinaison, établie *à priori*, entre les signes de translation et de rotation. — Établissement A PRIORI, abstrait et concret, des quatre règles fondamentales relatives aux quantités de la forme $a\sqrt{-1}$. — Reproduction périodique de $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$ comme équivalents respectifs de $(\sqrt{-1})^{4n}$, $(\sqrt{-1})^{4n+1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2}$, $(\sqrt{-1})^{4n+3}$. — Surfaces positives, surfaces négatives. — Carré de $a\sqrt{-1}$; passage de l'une à l'autre des formes $\sqrt{-a^2}$ et $a\sqrt{-1}$.



43. *Combinaison à priori des signes de translation et de rotation.* La rotation de chaque unité, soit positive soit négative, se représentant analytiquement par le *symbole factoriel* $\pm\sqrt{-1}$, il est clair que l'on aura :

(1). . . . . . $AB = (+a)\ (+\sqrt{-1})$ } *Rotation de droite*
(2). . . . . . $A'B = (-a)\ (+\sqrt{-1})$ } *à gauche.*

(3). . . . . . $A'B = (+a)\ (-\sqrt{-1})$ } *Rotation de gauche*
(4). . . . . . $AB = (-a)\ (-\sqrt{-1})$ } *à droite.*

On est *convenu* d'écrire, avec plus de simplicité, les expressions (1) et (2) sous la forme.

$$AB = (+a)\sqrt{-1} \qquad (1)$$

$$A'B = (-a)\sqrt{-1} \qquad (2)$$

Il serait même plus rigoureux de ne pas regarder ces dernières formules comme résultant d'une convention nouvelle : en effet la rotation perpendiculaire introduit *de fait* un nou-

vel axe de translation, perpendiculaire au premier sur lequel s'exécute et s'évalue la translation effective ; et il est clair que sur ce second axe YY', il faut distinguer, à partir du premier, deux sens opposés par rapport à XX'; il suit alors de là que BA et BA' sont de directions contraires sur YY' et que leurs représentations analytiques devront être de signes différents.

Les expressions (3) et (4), tenant lieu des grandeurs A'B et AB, doivent se confondre respectivement avec (2) et (1), ou avec (2') et (1'), dont elles ne peuvent différer que par la forme. De là découle le fait analytique suivant,

$$(+a)\,(+\sqrt{-1}) = +a\sqrt{-1}$$
$$(-a)\,(+\sqrt{-1}) = -a\sqrt{-1}$$
$$(+a)\,(-\sqrt{-1}) = -a\sqrt{-1}$$
$$(-a)\,(-\sqrt{-1}) = +a\sqrt{-1}$$

qui traduit ainsi à l'évidence et *à priori*, ce principe important.

Les signes de translation et de rotation se combinent factoriellement d'après les lois qui, relatives à la multiplication, constituent la règle des signes.

44. Remarque. On pourra donc toujours, dans une quantité de la forme $\pm\, m\sqrt{-1}$, admettre que $+\sqrt{-1}$ étant le signe de la rotation, s'effectuant ainsi de droite à gauche, le signe $\pm$ appartient à m : c'est là un moyen que nous employerons souvent pour établir des points de concordance entre diverses quantités imaginaires.

La quantité m est appelée le *coefficient* d'imaginarité.

45. *Addition et soustraction des quantités de la forme* a $\sqrt{-1}$

Soit l'opération

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1}$$

Les signes qui précèdent les lettres m, p et q pouvant, d'après la remarque que nous venons de faire, être regardes comme *propres à ces lettres*, et dès-lors le sens de rotation étant le même pour tous les additifs, la question sera ramenée, sur l'axe transitoire YY', correspondant à l'origine B fixe pour ces divers additifs, à considérer l'opération

$$m - p + q$$

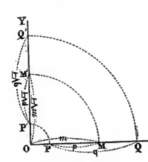
Le résultat cherché est donc

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1} = (m - p + q)\sqrt{-1}$$

Disons donc en règle :

Pour additionner ou pour soustraire les quantités de la forme $a\sqrt{-1}$, *il faut opérer sur les coefficients, et qualifier factoriellement le résultat ainsi obtenu du signe* $\sqrt{-1}$.

46. Présentons cette règle sous une forme plus matérielle, s'il nous est permis de nous exprimer ainsi.



Soient OX l'axe de translation, et OY l'axe *normal* : sur OX construisons

$$OQ = OM - PM + PQ$$

en prenant

$$OM = m \ , \ PM = p \ , \ PQ = q$$

Ensuite reportons OQ sur OY par un arc de cercle décrit du point O comme centre avec OQ pour rayon, et nous obtiendrons ainsi OQ'.

Faisons voir que OQ' qui, par une seule rotation normale, a évidemment ainsi pour valeur,

$$OQ' = (m - p + q)\sqrt{-1} \qquad (1)$$

est aussi le résultat des trois rotations normales

$$(+m)\sqrt{-1} \quad , \quad (-p)\sqrt{-1} \quad , \quad (+q)\sqrt{-1}$$

En effet la première de ces rotations transporte le point M en M', la seconde le point P en P', et enfin la troisième le point Q en Q'; or il est clair que

$$OQ' = OM' - MP + PQ \qquad (2)$$

D'ailleurs

$$m\sqrt{-1} = OQ' \qquad (3)$$
$$-p\sqrt{-1} = MP \qquad (4)$$
$$q\sqrt{-1} = PQ \qquad (5)$$

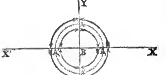
L'addition, membre à membre, des égalités (1), (2), (3), (4), (5) donne :

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1} = (m - p + q)\sqrt{-1}$$

ce qui établit la règle déjà trouvée analytiquement.

47. *Multiplication des quantités de la forme* $a\sqrt{-1}$.

Pour plus de simplicité, considérons d'abord le cas où $a = 1$, en voyant dans $\sqrt{-1}$ l'expression analytique de l'unité à laquelle on a fait subir *un quart de révolution.*



Dans la figure ci-jointe, déjà expliquée (n° 39), on peut supposer que

$$BA_1 = BA = BA_1' = BA' = 1$$

et l'on aura, en employant le signe rotatif normal, ou d'imaginarité,

$$(G)\begin{cases} BA_1 = 1 \\ BA = BA_1\sqrt{-1} \\ BA_1' = BA\sqrt{-1} \end{cases} \quad (G')\begin{cases} BA_1' = -1 \\ BA' = BA_1'\sqrt{-1} \\ BA_1 = BA'\sqrt{-1} \end{cases} \quad (G'')\begin{cases} BA_1 = 1 \\ BA = BA_1\sqrt{-1} \\ BA_1' = BA\sqrt{-1} \\ BA' = BA_1'\sqrt{-1} \\ BA_1 = BA'\sqrt{-1} \end{cases}$$

Multipliant successivement les deux premières, puis les trois premières égalités de chacun des groupes (G) et (G') et faisant des réductions évidentes, il viendra :

$$\left.\begin{matrix} AB = \sqrt{-1} \\ -1 = A_1'B = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \end{matrix}\right\}(g) \qquad \left.\begin{matrix} A'B = -\sqrt{-1} \\ +1 = A_1B = (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) \end{matrix}\right\}(g')$$

En multipliant d'une manière analogue les deux, puis les trois, les quatre et enfin toutes les égalités du groupe (G''), on obtient,

$$\left.\begin{matrix} AB = (\sqrt{-1}) \\ A_1'B = (\sqrt{-1})^2 \\ A'B = (\sqrt{-1})^3 \\ A_1B = (\sqrt{-1})^4 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (G_1)$$

Le rapprochement des relations (g), (g') et (G_1) prouve que

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^2 &= -1 \\ (\sqrt{-1})^3 &= -\sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^4 &= +1 \end{aligned}$$

En continuant à raisonner de même, et n désignant un nombre entier quelconque, ou

$$(\sqrt{-1})^{4n} = + \quad 1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = + \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = - \quad 1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = - \sqrt{-1}$$

Ces formules établissent ces règles :

1° *La forme d'une puissance quelconque de* $\sqrt{-1}$ *est* $+1$ *ou* -1, *selon que son degré est doublement ou simplement pair;*

2° *La forme d'une puissance quelconque de* $\sqrt{-1}$ *est* $+\sqrt{-1}$ *ou* $-\sqrt{-1}$, *selon que son degré est supérieur ou inférieur de 1 à un multiple de 4.*

48. Actuellement si l'on demande le produit

$$P = (a\sqrt{-1})\ (b\sqrt{-1})$$

on dira qu'il faut opérer sur le multiplicande, comme on a dû opérer sur l'unité pour avoir le multiplicateur; dès-lors, comme pour former $b\sqrt{-1}$ on doit imprimer à chaque unité de b un quart de révolution, il sera nécessaire, pour avoir P, d'imposer à $a\sqrt{-1}$ autant de mouvements de perpendicularité que la quantité b contient d'unités; l'un quelconque de ces mouvements a pour représentation analytique.

$$a\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1}$$

Il renverse (n° 41) le sens de translation de a, pour fournir ainsi $-a$, par suite de deux mouvements normaux consécutifs; de sorte que le résultat

$$a\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1} = -a$$

doit être pris b fois, ce qui donne,

$$P = ab\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1} = -ab$$

Si l'on remarque que le signe — qui affecte ab résulte aussi de $(\sqrt{-1})^2$, on aura cette règle relative à un nombre quelconque de facteurs;

Le produit d'un nombre quelconque k *d'imaginaires de la forme* a $\sqrt{-1}$ *s'obtient en faisant le produit de leurs coefficients et en tenant compte,* conformément aux lois du numéro précédent, *du nombre* k *de signes d'imaginarité.*

49. A un point de vue *explicitement concret*, nous dirons que le multiplicateur $b\sqrt{-1}$ signifie que l'unité a été prise b fois normalement, et que par suite, pour exécuter l'opération

$$a\sqrt{-1}\ .\ b\sqrt{-1}$$

comme il faut opérer de la même manière sur le multiplicande, il faudra d'abord imprimer à

$$0A' = 0A\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$$

un *quart de révolution,* ce qui donne

$$0A_1 = 0A'\sqrt{-1} = 0A\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1} = -0A = -a$$

Ensuite ce résultat $(-a)$ devant être considéré b fois par addition, on obtient

$$a\sqrt{-1}\ .\ b\sqrt{-1} = -ab.$$

Telle est donc la surface du rectangle OB' A_1 C_1, qui est ainsi l'*opposé* du rectangle OB'AC dont la surface est égale à ab : on comprend, par ces *simples* mots, la signification *réelle* que les signes $+$ et $-$ ont, *dès qu'ils s'appliquent aux surfaces;* à tel titre, par exemple ici, que les surfaces $(+ab)$ et $(-ab)$ ont des *hauteurs communes et des bases égales, mais de directions opposées.*

Il n'est pas sans importance, croyons-nous, de faire remarquer que jusqu'ici l'on regardait comme un symbole d'*impossibilité* et d'*absurdité*, une expression superficielle *négative,* numérique ou littérale : il n'en est cependant nullement ainsi, et le signe $(-)$ est, quant aux surfaces, la *conséquence* immédiate de la signification rationnelle du symbole normal $\sqrt{-1}$.

En effet la surface $(+ab)$ correspond au produit

$$(-a\sqrt{-1})\ (+b\sqrt{-1})$$

dans lequel le multiplicande $-a\sqrt{-1}$, qui est égal à $0A_2$, devient $+a$ par suite d'un mouvement normal de rotation.

50. Le carré de $a\sqrt{-1}$, serait d'après cette règle

$$(a\sqrt{-1})^2 = -a^2$$

Retournant, par l'extraction des racines, aux données de l'opération, on obtiendra

$$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$$

Et l'on voit que *toute quantité, engagée dans le signe d'imaginarité, peut en être expulsée par une extraction de racine carrée.*

Réciproquement :

Tout coefficient d'une imaginaire rentre sous le signe $\sqrt{}$ *par l'élévation au carré.*

On fait un fréquent usage des transformations qu'autorisent ces deux propriétés.

51. *Division des quantités de la forme* m$\sqrt{-1}$

Soit q le quotient inconnu de la division.

$$a\sqrt{-1} : b\sqrt{-1}$$

dont les termes $a\sqrt{-1}$ et $b\sqrt{-1}$ représentent respectivement a et b *unités normales*, comptées sur *la même* perpendiculaire à l'axe de translation.

Il est clair que l'opération proposée donne identiquement le même résultat que la division des quantités ordinaires a et b, et qu'ainsi

$$q = \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}$$

On dira donc :

Le quotient de deux imaginaires de la forme a$\sqrt{-1}$ *est égal à celui de leurs coefficients.*

La multiplication *concrète* des quantités de la forme $m\sqrt{-1}$ ayant été établie (n° 49), il est inutile de présenter de la même manière la division des quantités imaginaires de cette forme.

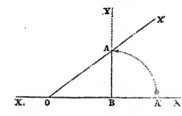
III.

DE L'EXPRESSION $a \pm b\sqrt{-1}$

—

Quantités imaginaires complètes telles que $a + b\sqrt{-1}$; leur signification concrète. — Établissement à priori, abstrait et concret, des quatre premières règles sur les imaginaires complètes. — Conditions d'égalités de deux imaginaires. — *Module*, ou *Norme* de GAUSS. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression $a + b\sqrt{-1}$ soit nulle, et réciproquement. — Module d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient. — Module d'une puissance, d'une racine. — Deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres, dont chacun est la somme de deux carrés. — Forme modulaire des quantités imaginaires. — Relation fondamentale entre les carrés faits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. — Démonstration concrète de cette propriété que *le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.* — Multiplication et division modulaire. — Formules de *Moivre.* — Les quantités $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$ sont inverses l'une de l'autre. — Deux théorèmes fondamentaux sur la convergence des séries réelles. — Séries imaginaires; caractère modulaire de leur convergence. — Extension du théorème de *Maclaurin* au cas de l'imaginarité. — Développements de a^x, e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arc}\sin x$. — Base népérienne, sa valeur. — Loi exponentielle imaginaire. — Formules de JEAN BERNOULLY. — Logarithmes imaginaires; logarithmes népériens imaginaires des quantités quelconques, des nombres positifs et des nombres négatifs. — Logarithmes imaginaires à base quelconque. — Passage logarithmique d'un système A à un autre système A'.

52. Il nous reste à nous occuper de la rotation angulaire pour un angle quelconque α.



Il est clair, d'après ce qui précède, qu'en tenant compte des directions OB et AB, perpendiculaires l'une à l'autre, l'expression

$$OB + AB\sqrt{-1}$$

constitue, par rapport à OX, la

détermination analytique de la direction OX', définie géométriquement d'ailleurs par la simultanéité des longueurs perpendiculaires OB et AB.

Pour étudier plus spécialement la détermination de l'inclinaison de OX' sur OX, considérons la *distance* OA dont l'extrémité a OB et AB pour éléments géométriques perpendiculaires :

Cette LONGUEUR OA, comptée sur OX', est liée à la même distance que l'on mesurerait sur OX, à l'aide d'un signe factoriel que nous représenterons par θ; cette liaison doit être factorielle, attendu qu'elle ne peut être établie par l'un des signes $+$ ou $-$, qui ne feraient que conserver ou renverser la direction de translation; on a donc ici

$$OA\cdot\theta = OB + AB\sqrt{-1}, \quad \textit{d'où} \quad \theta = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA}\sqrt{-1}$$

θ peut être appelé le *coefficient de direction*, de OA par rapport à OX : ainsi se présentent d'elles-mêmes les lignes trigonométriques, avec leur correspondance analytique complète, et l'on voit s'introduire naturellement, et comme fait de génération, la notion de *direction*.

En général les quantités reçues dans le calcul, sous le nom *si impropre* d'imaginaires, ont donc la forme

$$a + b\sqrt{-1}$$

a et b étant des rapports tels, par exemple, que $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{AB}{OA}$

Disons encore une fois que :

Si les quantités imaginaires constituent une catégorie spéciale, c'est parce que *leur existence* provient d'un mode incontestable et *indispensable*, suivant lequel la génération des grandeurs s'accomplit et se développe avec continuité.

Et si jusqu'à ce jour, l'on a maintenu *l'irrationnalité de la théorie* jusqu'à regarder ces quantités comme *impossibles*, comme *imaginaires*, comme appartenant en un mot à un monde *irréalisable*, c'est, qu'aveuglé par la routine, on n'a pas examiné les deux phases nécessaires, et essentiellement différentes, que présente l'étude de la formation des grandeurs.

Ces quantités, que nous proposerions volontiers de nommer *directrices*, afin de rappeler la signification de θ, trouvée

plus haut, sont tout aussi *réelles* que les quantités positives et négatives; leur introduction dans l'analyse est non-seulement *utile*, mais elle est aussi d'une *indispensable nécessité*.

53. *La direction* ou, comme nous le verrons (n° 72), *l'argument, d'une imaginaire peut-être augmenté ou diminué d'un nombre entier quelconque de circonférences.*

L'imaginaire $x = a + b\sqrt{-1}$ indiquant (n° 52) la direction de la droite OA qui a subi, autour de O et à partir de OX, une rotation angulaire égale à $\widehat{AOX}$, reste encore la même lorsque ce mouvement vient a être augmenté ou diminué d'un nombre entier quelconque de circonférences.

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, 2π exprime la longueur de la circonférence dont le rayon est égal à 1; par suite, α étant entier, l'argument θ d'une imaginaire peut être changé en $\theta \pm 2\alpha\pi$.

54. *Opérations fondamentales sur les quantités imaginaires.* Le calcul soumet cette nouvelle espèce de grandeurs aux règles ordinaires déjà établies, modifiées cependant en tenant compte des lois démontrées *à priori* (n°s 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51).

L'addition et la soustraction des quantités imaginaires de la forme $p \pm q\sqrt{-1}$, s'exécute en opérant d'une part sur les quantités p, et d'autre part sur les quantités q, en faisant abstraction de l'imaginarité; de telle sorte que, P et Q étant les résultats ainsi obtenus, on ait

$$P + Q\sqrt{-1}$$

En effet, la simultanéité des divers additifs, tels que $p + q\sqrt{-1}$ signifie, quant au point de vue concret, que l'on doit considérer à la fois :

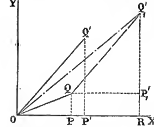
1° *Les diverses translations élémentaires* p; d'où l'on déduit

$$P = \text{somme } \textit{algébrique} \text{ des quantités } p.$$

2° *Les nouvelles quantités normales à l'axe de translation.* Or, comme il est évident que q indique, perpendiculairement à l'axe fixe, l'éloignement du point générateur, il est clair que, des actions normales exercées sur ce point, il résultera une position dont la distance à l'axe sera telle, que

$$Q = \text{somme } \textit{algébrique} \text{ des quantités } q.$$

Sous une forme géométrique, considérons, sans que nos raisonnements fassent entrer en ligne de compte le nombre des additifs, les deux imaginaires



$$\left.\begin{array}{l} p + q\sqrt{-1} \\ p' + q'\sqrt{-1} \end{array}\right\} \text{pour lesquelles} \left\{\begin{array}{l} OP = p,\ OP' = p' \\ PQ = q,\ P'Q' = q' \end{array}\right.$$

Les générations individuelles de chacune des quantités à additionner, devant nécessairement ici se succéder, il faudra, au lieu de O, donner le point Q pour *origine* à l'imaginaire $p' + q'\sqrt{-1}$; et c'est ce que l'on fera en menant d'abord à OX par Q la parallèle $QP'_1 = OP'$; puis à oy, par P'_1, on mène $P'_1Q'_1$ parallèle et égale à $P'Q'$. Le point générateur, qui se trouvait d'abord en O, sera donc maintenant en Q'_1, dont l'imaginaire correspondante est évidemment

$$(p + p') + (q + q')\sqrt{-1}$$

55. Quant à la soustraction et s'il fallait revenir de cette dernière expression à la quantité primitive $p + q\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, exécuter l'opération

$$(p + p') + (q + q')\sqrt{-1} - (p' + q'\sqrt{-1})$$

il faudrait abaisser de Q'_1 la perpendiculaire Q'_1K sur OX, prendre ensuite $Q'_1P'_1 = q'$; puis mener par P'_1 la parallèle P'_1Q à OX, et faire $P'_1Q = p'$: la ligne OQ, pour laquelle on a le reste $p + q\sqrt{-1}$, résoudrait la question proposée.

56. Quant au *produit de deux facteurs* imaginaires tels que

$$a + b\sqrt{-1} \quad et \quad a' + b'\sqrt{-1}$$

conformément à la définition de l'opération on aura à faire, sur le multiplicande les mêmes opérations qui, en modifiant l'unité, donnent le multiplicateur. Dans $a' + b'\sqrt{-1}$, nous avons distingué :

1° La translation de a' unités ;

2° La translation de b' unités ;

3° La rotation normale de ces b' unités, à partir de l'origine de la première d'entr'elles.

Nous devons donc prendre ,

1° a' fois le multiplicande par translation, suivant sa direction *propre;* c'est ce qui donne

$$aa' + a'b\sqrt{-1} \qquad (1)$$

2° b' fois le multiplicande par translation en conservant la direction, et l'on a

$$ab' + bb'\sqrt{-1} \qquad (2)$$

3° Le résultat (2); de cette dernière opération, dans une direction qui lui soit perpendiculaire; on doit donc multiplier par $\sqrt{-1}$ et l'on obtient

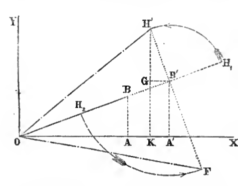
$$ab'\sqrt{-1} - bb' \qquad (2')$$

Le produit cherché est enfin

$$aa' - bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

Il est bon de remarquer que le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires reste le même, dans quelqu'ordre que l'on multiplie les différents facteurs.

57. Etudions maintenant, au point de vue *concret*, l'opération $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$



Le multiplicande donnant la direction de la droite OB par exemple, il faudra d'abord 1° effectuer a' fois la translation de $a+b\sqrt{-1}$, ou de OB, suivant OX': c'est ainsi que l'on obtient le point B'. 2° il faut encore effectuer b' fois cette translation, toujours sur OX', mais à partir du point B' et dans un sens convenable, selon le signe du terme $b'\sqrt{-1}$; cela donne le point H_1, si b' est positif. 3° Enfin il faut, de droite à gauche, effectuer la rotation normale de $B'H_1$, de manière à obtenir le point H', dont l'imaginaire est

$$aa' - bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

Il va sans dire que, si b' était négatif, et égal par exemple

à $B'H_2$, la rotation normale fournirait le point F, ainsi que l'*imaginaire* DIRECTRICE

$$aa' + bb' + (a'b - ab')\sqrt{-1}$$

58. THÉORÈME I. — *Le produit d'un nombre quelconque d'imaginaires de la forme* $p + q\sqrt{-1}$, p *et* q *étant des quantités entières, fractionnaires, positives ou négatives, est une imaginaire de même forme.*

Démonstration. — Soient en effet les facteurs.

$$a_1 + b_1\sqrt{-1} \quad , \quad a_2 + b_2\sqrt{-1} \quad , \quad a_3 + b_3\sqrt{-1}, \; \ldots\ldots$$

En multipliant les deux premières on obtient un produit qui, d'après ce que l'on vient de voir dans le numéro précédent, a la forme

$$m_2 + n_2\sqrt{-1}$$

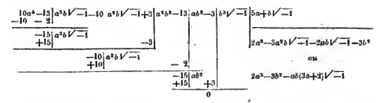
En multipliant ce résultat par le troisième facteur imaginaire, il viendra un nouveau produit de même forme,

$$(m_2 + n_2\sqrt{-1})(a_3 + b_3\sqrt{-1}) = m_3 + n_3\sqrt{-1}$$

On continuerait à opérer de la sorte, jusqu'à ce qu'ayant multiplié par le dernier facteur, on ait obtenu le produit demandé, qui est encore une expression de même forme que chacun des facteurs.

59. La division des quantités imaginaires ne présente dès-lors aucune difficulté et se traite absolument de la même manière que la division des polynomes ordinaires : on aura soin d'ordonner par rapport à la même lettre commune le dividende et le diviseur, sans mettre comme on pourrait croire peut-être le signe $\sqrt{-1}$ en facteur commun.

EXEMPLE :



On pourrait nommer *paramètre* la quantité qui, dans une imaginaire, est indépendante de $\sqrt{-1}$ et *coefficient*, la quantité dont $\sqrt{-1}$ est le facteur.

60. Théorème II. — *Lorsque deux quantités imaginaires sont égales, il y a égalité : 1° entre les coefficients, 2° entre les paramètres.*

Démonstration. — Soit l'expression,

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$$

et l'identité

$$-a' - b\sqrt{-1} = -a' - b\sqrt{-1}$$

Par addition, membre à membre, il vient :

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{-1}$$

ce qui signifie que

$$a = a' \quad et \quad b = b'$$

car c'est dans ce seul cas qu'une quantité $a - a'$ comptée sur l'axe de translation peut être égale, ou *plutôt identique*, à une autre quantité $(b - b')\sqrt{-1}$, perpendiculaire à cet axe.

Du reste, sans recourir à la formule, on peut remarquer que si deux imaginaires, rapportées à des axes différents de translation, sont égales, il faut et il suffit que l'on puisse opérer leur superposition ; et c'est précisément ce qui ne peut avoir lieu que si, d'une part, les coefficients sont égaux, et que d'autre part les paramètres le sont également.

61. Nous prouverons, dans la suite, que toutes les expressions imaginaires que l'on peut rencontrer reviennent, quel qu'en soit le degré, à des imaginaires de la forme

$$p + q\sqrt{-1}$$

qui pour cette raison, portent quelquefois le nom d'*imaginaires du second degré.*

Des imaginaires

$$p + q\sqrt{-1} \quad et \quad p - q\sqrt{-1}$$

sont *conjuguées* quand, elles ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$

Les imaginaires conjuguées jouissent évidemment de la propriété d'avoir une somme $2p$, et un produit $p^2 + q^2$, dans lesquels le signe $\sqrt{-1}$ n'existe plus.

La valeur absolue, ou prise positivement, de la racine carrée de la quantité $p^2 + q^2$, c'est-à-dire *de la somme des carrés du paramètre et du coefficient*, est ce que l'on nomme le *module* ou, d'après Gauss, le *norme* de *chacune* des expres-

sions $p + q\sqrt{-1}$ et $p - q\sqrt{-1}$; et le *théorème* II fait apercevoir à l'instant que,

L'égalité de deux expressions imaginaires entraine l'égalité de leurs modules, sans que toutefois la réciproque soit vraie.

62. Théorème III. — *Pour qu'une expression imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul; la réciproque est vraie.*

Démonstration. — 1° Si l'on a

$$p + q\sqrt{-1} = 0$$

il faut que l'on ait simultanément,

$$p = 0 \qquad et \qquad q = 0$$

d'où l'on déduit que le module est *nul.*

2° Si le module est *nul*, on a donc

$$p^2 + q^2 = 0$$

et par conséquent

$$p = 0 \qquad et \qquad q = 0$$

d'où

$$p + q\sqrt{-1} = 0$$

63. Théorème IV. — *Le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.*

Démonstration. — Soient les imaginaires

$$a + b\sqrt{-1} \qquad et \qquad a' + b'\sqrt{-1}$$

dont les modules respectifs sont donnés par

$$m^2 = a^2 + b^2 \qquad et \qquad m'^2 = a'^2 + b'^2 \qquad (1)$$

1° En considérant d'abord la somme des expressions proposées, et en représentant le module par s, on aurait :

$$s^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2$$

mais par addition des relations (1) on a :

$$m^2 + m'^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2$$

En ajoutant et en soustrayant successivement $2mm'$ aux deux membres de cette dernière égalité, il vient, si l'on suppose $m > m'$,

$$(m - m')^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - 2mm'$$
$$(m + m')^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2mm'$$

d'où encore, par une transformation facile à saisir,

$$(m-m')^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 - 2(mm'+aa'+bb')$$
$$= s^2 - 2(mm'+aa'+bb') \qquad (2)$$
$$(m+m')^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 + 2(mm'-aa'-bb')$$
$$= s^2 + 2(mm'-aa'-bb') \qquad (3)$$

mais de

$$m^2m'^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = a^2a'^2+b^2b'^2+a'^2b^2+a^2b'^2$$

On déduit évidemment, par addition et soustraction de $2aa'bb'$, dans le second membre,

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+a^2b'^2-aa'bb'-aa'bb'+a'^2b^2$$

d'où, par dégagements de facteurs communs,

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+ab'(ab'-a'b)-a'b(ab-a'b)$$

ou bien

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2$$

On voit donc que

$$mm' > aa'+bb'$$

Et les relations (2) et (3) montrent dès lors que

$$\left.\begin{array}{l}(m-m')^2 > s^2 \\ (m+m')^2 < s^2\end{array}\right\} \text{ d'où } \begin{array}{l} m-m' < s \\ m+m' > s\end{array} \qquad c.q.f.d.$$

64. Théorème V. — *Le module du produit de deux facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs.*

Démonstration. — Soient les facteurs

$$a+b\sqrt{-1} \qquad et \qquad a'+b'\sqrt{-1}$$

dont les modules sont

$$m = \sqrt{a^2+b^2} \qquad et \qquad m' = \sqrt{a'^2+b'^2}$$

et dont le produit, qui est

$$P = aa'-bb'+(ab'+a'b)\sqrt{-1}$$

a pour module p, donné par,

$$p^2 = (aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2 = a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2$$

d'où, par dégagements de facteurs communs,

$$p^2 = a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2) = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$

et enfin

$$p = mm \qquad c.q.f.d.$$

65. Corollaire I. — *Le module du produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs.*

Supposons, en effet, que cela soit vrai pour un nombre quelconque n de facteurs, dont le produit P_n ait la forme $A + B\sqrt{-1}$, et dont le module soit p_n. En représentant par $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ les modules des facteurs, on suppose donc que

$$p_n^2 = A^2 + B^2 = m_1^2\, m_2^2\, m_3^2 \ldots m_n^2 \qquad (1)$$

Mais si dans P_n on introduit le nouveau facteur imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il viendra

$$P_{n+1} = A\alpha - B\beta + (A\beta + B\alpha)\sqrt{-1}$$

Le module p_{n+1} de P_{n+1} est ainsi

$$p_{n+1}^2 = (A\alpha - B\beta)^2 + (A\beta + B\alpha)^2 = (A^2 + B^2)(\alpha^2 + \beta^2) \qquad (2)$$

Le produit, membre à membre, des expressions modulaires (1) et (2) donne, après simplifications, extractions de racines carrées, et si l'on remarque que $\alpha^2 + \beta^2$ est le module m_{n+1} du $(n+1)^{\text{ème}}$ facteur introduit

$$p_{n+1} = m_1\, m_2\, m_3 \ldots\ldots m_n\, m_{n+1} \qquad (3)$$

On voit donc que si la propriété, qu'il s'agit d'établir, est vraie pour n facteurs, elle est par cela même *vraie pour* $n+1$ facteurs : or elle est démontrée pour $n=2$, donc la loi existe pour $n=3$, puis de *proche en proche*, et ainsi de suite pour n ayant une valeur quelconque.

66. Corollaire II. — *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.*

En effet, pour qu'un produit de plusieurs facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit (nº 62) que son module soit nul; et réciproquement. Or ce module, qui est le produit des modules des facteurs, ne peut être nul que si l'un quelconque au moins de ses modules, réels nécessairement, n'est nul lui-même; alors (nº 62) le facteur imaginaire correspondant à ce module est nul.

67. Corollaire III. — *Le module de la puissance* n^{ième} *d'une quantité imaginaire est la* n^{ième} *puissance du module de cette quantité.*

En effet, dans la démonstration du corollaire précédent, il suffit de supposer qu'il y a égalité entre les divers facteurs.

68. Corollaire IV. — *Le module de la racine* $r^{\text{ième}}$ *d'une quantité imaginaire est la racine* $r^{\text{ième}}$ *du module de cette quantité.*

En effet, de

$$x = \sqrt[r]{a+b\sqrt{-1}}$$

on déduit

$$x^r = a+b\sqrt{-1}$$

Et si m est le module de la quantité imaginaire donnée, tandis que X est celui de x, on aura

$$X^r = m, \quad d'où \quad X = \sqrt[r]{m} \qquad c.q.f.d.$$

69. Corollaire V. — *Le produit de deux nombres, qui sont chacun la somme de deux carrés, est aussi la somme de deux carrés.*

L'identité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2 \qquad (4)$$

à laquelle l'on a eu recours (n° 64) est la traduction analytique de cette propriété.

70. Corollaire VI. — *Il y a toujours* deux *manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres, dont chacun est la somme de deux carrés.*

Car si dans l'égalité que nous venons de rappeler, on *permute* les lettres a' et b', ce qui ne change pas la valeur du produit $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$, il viendra aussi

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (ab'-a'b)^2+(aa'+bb')^2 \qquad (5)$$

71. Corollaire VII. — *Le produit des deux facteurs*

$$a^2+nb^2 \qquad et \qquad a'^2+nb'^2$$

peut être exprimé de deux manières différentes sous la forme

$$A^2+nB^2$$

Dans la démonstration du *théorème* V (n° 64) les quan-

tités b et b' sont quelconques, et l'on peut ainsi, dans les formules (4) et (5), se permettre de changer

$$b \quad en \quad b\sqrt{n}$$
$$b' \quad en \quad b'\sqrt{n}$$

On obtiendra ainsi

$$(a^2+nb^2)(a'^2+nb'^2)=(aa'-nbb')^2+n(ab'+a'b)^2$$
$$(a^2+nb^2)(a'^2+nb'^2)=(aa'+nbb')^2+n(ab'-a'b)^2 \quad c.q.f.d.$$

72. *Forme modulaire des quantités imaginaires.* Les expressions imaginaires peuvent se mettre sous une forme particulière qui simplifie singulièrement les calculs auxquels elles donnent lieu.

L'expression imaginaire

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

étant donnée, en désignant par m le module, et par r le rapport de b à a, on peut écrire,

$$a^2 + b^2 = m^2 \qquad (1)$$

$$\frac{b}{a} = r \qquad (2)$$

Et, en représentant par F et f les facteurs, qui multipliés par m reproduiraient respectivement a et b, c'est-à-dire en posant

$$a = m\,F \qquad (3)$$

$$b = m\,f \qquad (4)$$

il viendrait, par substitution de (3) et (4) dans (1),

$$F^2 + f^2 = 1 \qquad (5)$$

La division de (3) par (4) donne, conformément à (2) et après élévation au carré,

$$\frac{F^2}{f^2} = r^2 \qquad (6)$$

La valeur de F^2, tirée de (6) étant introduite dans (5), donne aisément

$$f^2 = \frac{1}{r^2+1} \qquad (7)$$

et par suite, toujours à l'aide de (5),

$$F^2 = \frac{r^2}{r^2 + 1} \qquad (8)$$

r peut être une quantité quelconque, et, comme on sait par la trigonométrie, que la tangente d'un angle peut passer, ainsi que cet angle, par *toutes les valeurs possibles*, on pourra poser, en désignant par θ un certain angle convenable, qui désormais portera le nom d'*argument*,

$$r = \text{tang}\, \theta$$

On aura ainsi

$$f^2 = \frac{1}{1 + \text{tang}^2\theta} \quad \textit{et} \quad F^2 = \frac{\text{tang}^2\theta}{1 + \text{tang}^2\theta}$$

Dès lors on voit que (Trigonométrie)

$$f^2 = \cos^2\theta \quad \textit{et} \quad F^2 = \sin^2\theta$$

par suite

$$\left.\begin{array}{l} a = \pm\, m.\, \cos\, \theta \\ b = \pm\, m.\, \sin\, \theta \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Et l'on aura soin de prendre pour argument θ, celui qui, ayant $\frac{b}{a}$ pour tangente, a son cosinus de même signe que b.

L'expression imaginaire proposée prendra donc la forme générale

$$x = m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\, \sin\theta) \qquad (10)$$

73. Quelles que soient les valeurs respectives de a et de b, c'est-à-dire quelle que soit l'inclinaison de la droite OX' sur OX, on peut prendre sur OX une longueur $OL = 1$: soient P la projection de L sur OX, et θ le *coefficient d'inclinaison de* OX', par rapport à OX.

Supposons que m étant le module d'une imaginaire donnée, on ait fait

$$OA = OL.\, m = m.$$

Relativement à OA, on a donc

$$AO.\,\theta = BO + AB\sqrt{-1}$$

d'où

$$\theta.\,LO = \frac{BO}{m} + \frac{AB}{m}\sqrt{-1} \qquad (1)$$

Considérant spécialement cette imaginaire nous dirions que si l'on voulait *construire* son produit par m, il faudrait nécessairement opérer sur ses éléments OP et LP ou $\frac{BO}{m}$ et $\frac{AB}{m}$, de la même manière que pour passer de la longueur inclinée $OL = 1$, à la longueur inclinée $OA = m.\,OL$; on *voit* donc que

$$\left.\begin{array}{l} BO = PO.\,m \\ AB = LP.\,m \end{array}\right\} \text{ d'où } \overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = m^2\left(\overline{PO}^2 + \overline{LP}^2\right) \qquad (2)$$

Mais les éléments F et f (n° 72), qui sont représentés par PO et LP ne sont rien autre chose que *les réductions à l'unité de longueur inclinée* des quantités BO et AB : or, dans ce cas, la transformation modulaire établissant que $F^2 + f^2 = 1$, montre qu'ici l'on a

$$\overline{PO}^2 + \overline{LP}^2 = 1 = \overline{LO}^2 \qquad (3)$$

La combinaison de (2) et (3) donne

$$\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = m^2.\,\overline{LO}^2 = (m.\,LO)^2$$

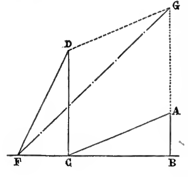
Et enfin, comme $AO = m.\,LO$,

$$\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2$$

On reconnait dans ce résultat la relation qui existe entre les carrés faits sur les trois côtés d'un triangle rectangle.

Dans un autre travail nous ferons voir comment la théorie des imaginaires traite avec facilité et promptitude toutes les questions de Géométrie, et comment, en particulier, elle conduit à la théorie complète de la *Polygonométrie plane*.

74. Démontrons, à l'aide de la propriété si connue du carré de l'hypothénuse, que (n° 65) *le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.*



Soient les deux types

$$a + b\sqrt{-1} \quad et \quad a' + b'\sqrt{-1}$$

pour lesquels on fait,

$$BC = a \quad , \quad AB = b \quad , \quad AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$CF = a' \quad , \quad CD = b' \quad , \quad DF = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Prolongeons AB d'une quantité AG = CD, et traçons les droites DG et FG; la ligne DG est évidemment égale à AC, et l'on a dans le triangle DFG,

$$DF - DG < FG < DF + DG$$

Si l'on remplace les quantités DF, DG, FG en fonction de a, b, a' et b' il viendra :

$$\sqrt{a'^2+b'^2} - \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} < \sqrt{a'^2+b'^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

c.q.f.d.

75. *Multiplication modulaire.* — Soit à multiplier les deux imaginaires

$$x = m\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta)$$
$$x' = m'\ (\cos\theta' + \sqrt{-1}\ \sin\theta')$$

En effectuant le produit, suivant la règle déjà établie, on trouve

$$xx' = mm'\ [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \sqrt{-1}\,(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)]$$

Et comme on sait, par la trigonométrie, que

$$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$$
$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\ \sin\theta'$$

On obtiendra,

$$xx' = mm' \left[\cos(\theta + \theta') + \sqrt{-1} \sin(\theta + \theta')\right]$$

ce qui fait voir que *pour multiplier deux expressions imaginaires, on doit multiplier les modules et ajouter les arguments.*

76. Corollaire I. — *Pour multiplier un nombre quelconque d'expressions imaginaires, il suffit de multiplier les modules et d'ajouter les arguments.*

77. Corollaire II. — *Pour élever une expression imaginaire à une puissance de degré* n, *il suffit d'élever le module à cette puissance, et de multiplier l'argument par le degré* n.

En général on aurait donc, n étant *entier* et quelconque,

$$x^n = m^n \left[\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta\right]$$

$$(\cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta$$

Telle est la belle formule du géomètre français Moivre.

Il suffirait en effet de poser dans le produit d'un nombre quelconque d'imaginaires,

$$x = x' = x'' = x''' \ldots\ldots$$

$$m = m' = m'' = m''' \ldots\ldots$$

$$\theta = \theta' = \theta'' = \theta''' \ldots\ldots$$

78. *Division modulaire.* — Soit la division

$$\frac{x}{x'} = \frac{m(\cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta)}{m'(\cos\theta' + \sqrt{-1} \sin\theta')}$$

En multipliant, d'après la règle qui vient d'être trouvée (n° 75), les deux termes de cette fraction par l'imaginaire $\cos\theta' - \sqrt{-1}\sin\theta'$, il viendra, en remarquant que $\sin^2\theta' + \cos^2\theta' = 1$,

$$\frac{x}{x'} = \frac{m}{m'} \left[\cos(\theta - \theta') + \sqrt{-1} \sin(\theta - \theta')\right]$$

C'est-à-dire que, *pour diviser deux expressions imaginaires, il faut diviser les modules et retrancher les arguments.*

79. Corollaire. — On a

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta} = \cos\theta - \sqrt{-1} \sin\theta$$

En effet, si l'on multiplie le dividende et le diviseur par $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$, il viendra

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \qquad (1)$$

Mais on a vu (n° 72) si l'expression imaginaire diviseur dont l'argument est θ, est primitivement

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

l'on a, m étant le module,

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \pm \dfrac{a}{m} \\ \sin\theta = \pm \dfrac{b}{m} \end{array}\right\} \quad \textit{d'où} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = a^2 + b^2 = 1$$

Le dénominateur du second membre de (1) est donc égal à 1, et par suite l'on a

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta} = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$$

c'est-à-dire que $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$ sont *inverses* l'une de l'autre.

80. Il reste à fixer la signification des expressions

$$\begin{array}{ll} a^x, & \sin x \\ \log x, & \text{arc} \sin x \end{array}$$

lorsque la variable x est *imaginaire*. Ces fonctions étaient, pour x *réel*, inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire données par des opérations inverses.

Il est nécessaire de présenter succinctement quelques propriétés analytiques fondamentales appartenant à la convergence des séries.

Soit la série

$$t_0\,,\quad t_1\,,\quad t_2\,\ldots\ldots\, t_n \qquad (1)$$

et A la plus grande des limites réelles vers lesquelles converge $\sqrt[n]{t_n}$ lorsque n croît indéfiniment.

81. Théorème VI. — *Cette série est convergente si* $A < 1$.

Démonstration. — En donnant à n toutes les valeurs entières successives depuis 0, on aura, par définition de A,

$$t_0 < 1\,,\quad t_1 < A\,,\quad t_2 < A^2\,\ldots\ldots\, t_n < A^n$$

Et par suite

$$\sum^{n} t_n < \sum_{0}^{n} A^n$$

d'où, en vertu de la formule sommatoire d'une progression factorielle,

$$\sum_{0}^{n} t_n < \frac{1-A^{n+1}}{1-A}$$

Or si A est plus grand que 1, le second membre de cette égalité croît sans cesse, tandis que si $A < 1$, la quantité $\frac{1-A^{n+1}}{1-A}$ converge vers la fraction $\frac{1}{1-A}$: la série (1) est donc convergente dans le cas où $A < 1$.

82. Théorème VII. — *La série* (1) *est encore convergente si la plus grande valeur du rapport* $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ *est moindre que* 1, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Démonstration. — D'après cette condition, et en donnant à x toutes les valeurs entières successives, à partir de 0, on aura, en désignant par r ce rapport

$$\frac{t_1}{t_0} < r, \quad \frac{t_2}{t_1} < r, \quad \frac{t_3}{t_2} < r, \; \ldots\ldots \frac{t_n}{t_{n-1}} < r$$

d'où

$$\begin{aligned} t_1 &< t_0 \; r \\ t_2 &< t_1 \; r \\ t_3 &< t_2 \; r \\ &\;\;\vdots \\ t_n &< t_{n-1} r \end{aligned}$$

Multipliant ces inégalités, membre à membre, d'abord les deux premières, puis les trois premières, les quatre premières, et ainsi de suite, il viendra :

$$\begin{aligned} t_1 &< t_0 \; r \\ t_2 &< t_0 \; r^2 \\ t_3 &< t_0 \; r^3 \\ &\;\;\vdots \\ t_n &< t_0 \; r^n \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_0^n t_n < \sum_0^n t_0 r^n \quad ou \quad \sum_0^n t_n < t_0 \sum_0^n r^n$$

Effectuant la somme de la progression factorielle, on obtient

$$\sum_0^n t_n < t_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Le second membre de cette inégalité convergeant vers la limite finie $\frac{1}{1-r}$, si $r < 1$ lorsque n croît indéfiniment, on voit que la série proposée est convergente dans le même cas.

83. Séries imaginaires. — Considérons actuellement la série, à termes imaginaires,

$$t_0\ ,\quad t_1\ ,\quad t_2\ ,\quad t_3 \ldots\ldots\ t_n \qquad (1)$$

On sait (n° 62) que, pour qu'une expression imaginaire converge vers zéro, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de son module.

La convergence de (1) exige donc simultanément que

1° Les modules de ses divers termes décroissent à mesure que n augmente.

2° La somme de tous ses termes, à partir d'un certain terme, décroisse en-dessous de toute limite, à mesure que n augmente.

Cette dernière condition ne sera satisfaite que si *le module de cette somme va sans cesse en décroissant;* mais nous savons que (n° 63) le module de la somme de plusieurs types imaginaires est moindre que la somme des modules de ces types; donc, si cette dernière somme converge vers une limite finie, c'est-à-dire *si la somme des modules des termes de* (1) *forme une série convergente, la série imaginaire* (1) *est elle-même convergente.*

84. Les traités d'analyse différentielle ne justifient point l'application qu'ils font, au cas de l'imaginarité des variables, de certains développements qui n'ont été obtenus que pour des valeurs réelles des mêmes éléments.

Cette lacune regrettable se fait principalement remarquer pour les séries de Taylor et de Maclaurin.

Pour satisfaire aux besoins de cette dissertation nous établirons seulement ici que,

Théorème VIII. — *La formule de Maclaurin subsiste pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable; et nous signalerons le cas où elle deviendrait illusoire.*

Démonstration. — Soit la fonction

$$y = \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \sqrt{-1}\, f(x) \qquad (1)$$

Aux fonctions $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$, par hypothèses continues, on pourra appliquer la formule de Maclaurin, pourvue de son TERME-LIMITE, et l'on aura, μ' et μ'' étant moindres que 1,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + x\,\mathrm{F}'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x)$$

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,f^{(n)}(\mu'' x)$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} y = \varphi x = {} & [\mathrm{F}(0) + \sqrt{-1}\, f(0)] + x\,[\mathrm{F}'(0) + \sqrt{-1}\, f'(0)] \\ & + \frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{F}''(0) + \sqrt{-1}\, f''(0)] + \cdots \\ \cdots + {} & \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,[\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n-1)}(0)] \\ & + \frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Mais il est évident que la composition (1) de y donne en général, n étant l'ordre d'une dérivation quelconque,

$$\varphi^{(n)}(x) = \mathrm{F}^{(n)}(x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(x)$$

Par suite l'expression (2) revient à :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\,\varphi''(0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)] \qquad (3)$$

Si des valeurs, continuement et indéfiniment croissantes de n, font converger vers zéro chacune des expressions

$$\frac{x^n}{[n]}\,\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) \qquad \textit{et} \qquad \frac{x^n}{[n]}\,f^{(n)}(\mu'' x)$$

il est évident que l'expression

$$\frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)]$$

tendra aussi vers zéro ; or, c'est ce qui se présentera toutes les fois que $\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x)$ et $f^{(n)}(\mu'' x)$ conservent des valeurs finies.

Dans de pareilles conditions on a donc, x *étant* encore réel, et n illimité,

$$\varphi x = \varphi(0) + \sum_1^n \frac{x^n}{[n]} \varphi^{(n)}(0)$$

C'est là, comme on voit, la formule de *Maclaurin*.

85. Supposons actuellement le cas où x est imaginaire et de la forme

$$x = m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

le module m et l'argument θ étant des quantités réelles, et soit la fonction

$$y = \varphi(x) = \varphi[m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)] \qquad (1)$$

que l'on peut écrire, en représentant par $F(m)$ et $f(m)$ des fonctions réelles de m,

$$y = \varphi(x) = F(m) + \sqrt{-1}\, f(m) \qquad (2)$$

Supposons que la fonction y et ses dérivées, d'ordre au plus égal à n, soient continues pour toute valeur imaginaire de x, dont le module m est compris entre o et k; $F(m)$ et $f(m)$ resteront continues entre ces mêmes limites, et l'on aura comme dans le paragraphe précédent :

$$F(m) = F(0) + \frac{m}{1}F'(0) + \frac{m^2}{1.2}F''(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m^{n-1}}{[n-1]}F^{(n-1)}(0) + \frac{m^n}{[n]}F^{(n)}(\mu' m)$$

$$f(m) = f(0) + \frac{m}{1}f'(0) + \frac{m^2}{1.2}f''(0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m^{n-1}}{[n-1]}f^{(n-1)}(0) + \frac{m^n}{[n]}f^{(n)}\mu'' m)$$

et par suite

$$y = \left\{ \begin{array}{l} [F(0) + \sqrt{-1}\, f(0)] + \frac{m}{1}[F'(0) + \sqrt{-1}\, f'(0)] \\ \qquad + \frac{m^2}{1.2}[F''(0) + \sqrt{-1}\, f''(0)] + \cdots \\ \cdots + \frac{m^{n-1}}{[n-1]}[F^{(n-1)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n-1)}(0)] \\ \qquad + \frac{m^n}{[n]}[F^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(0)] \end{array} \right\} \qquad (3)$$

Mais de la relation

$$\varphi\,[m\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]=F(m)+\sqrt{-1}\,f(m)$$

on déduit, en prenant les dérivées de l'ordre (i) des deux membres, par rapport à m,

$$[\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta]^i\,\varphi^{(i)}\,[m\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]$$
$$=F^{(i)}(m)+\sqrt{-1}\,f^{(i)}(m)$$

Cette expression, existant par hypothèse pour toute valeur de m comprise entre o et k, il viendra, en y faisant $m=o$,

$$[\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta]^i\,\varphi^{(i)}(0)=F^{(i)}(0)+\sqrt{-1}\,f^{(i)}(0)\qquad(4)$$

Cette dernière égalité, vraie depuis $i=o$, jusqu'à $i=n$ inclusivement, permet de modifier la composition de (3) ainsi qu'il suit :

$$\varphi\,[m(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]=\varphi(0)+\frac{m(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)}{1}\,\varphi'(0)$$
$$+\frac{m^2(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^2}{1\,.\,2}\,\varphi''(0)+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{m^{n-1}(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^{n-1}}{[n-1]}\,\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{m^n}{[n]}\,[F^{(n)}(\mu'm)+\sqrt{-1}\,f^{(n)}(\mu''m)]$$

ou bien évidemment,

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\,\varphi'(0)+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{[n]}\cdot\frac{F^{(n)}(\mu'm)+\sqrt{-1}\,f^{(n)}(\mu''m)}{(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^n}$$

Le nombre n de termes croissant donc indéfiniment, il est clair qu'aussi longtemps que les fonctions

$$F^{(n)}(\mu'm)\qquad et\qquad f^{(n)}(\mu''m)$$

conserveront des *valeurs* FINIES, la fonction proposée pourra se développer suivant la loi

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\,\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\,\varphi''(0)+\cdots\cdots$$

On peut donc affirmer que

Les développements fournis par la formule de Maclaurin, pour des valeurs réelles de la variable, sont encore vrais lorsque cette variable reçoit des valeurs imaginaires quelconques.

86. Ainsi l'on a encore, pour x imaginaire,

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

$$\text{arc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{3.3.5.5x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

Observation. — Dans e^x si l'on pose $x = 1$, il vient

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$$

On sait que e *est la base des logarithmes népériens;* sa valeur fournie par cette suite numérique est

$$e = 2{,}7182818284590452353560287\ldots..$$

87. *La loi fondamentale exponentielle imaginaire*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

est la conséquence immédiate de l'existence du développement de a^x, dans lequel x étant quelconque on peut changer x en y et x en $x+y$, ce qui donnera

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2}{1.2}\log^2 a + \frac{x^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$a^y = 1 + \frac{y}{1}\log a + \frac{y^2}{1.2}\log^2 a + \frac{y^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$a^{x+y} = 1 + \frac{x+y}{1}\log a + \frac{(x+y)^2}{1.2}\log^2 a + \frac{(x+y)^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

Sous une forme plus explicite on a donc,

$$a^{x\sqrt{-1}} \cdot a^{y\sqrt{-1}} = a^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

88. Corollaire. — La série de Maclaurin donnant

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

que x soit réel ou imaginaire, nous sommes autorisés actuellement à y changer x en $\theta\sqrt{-1}$ et en $-\theta\sqrt{-1}$; on obtiendrait alors

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \frac{\theta^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \\ + \left(\theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right)\sqrt{-1} \end{array} \right.$$

$$e^{-\theta\sqrt{-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \frac{\theta^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \\ - \left(\theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right)\sqrt{-1} \end{array} \right.$$

En vertu des développements en séries (n° 86) de sin x et de cos x, on peut écrire

$$\left. \begin{array}{l} e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \\ e^{-\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta \end{array} \right\} \quad (A)$$

Par l'addition et par la soustraction de ces relations, membre à membre, on obtient

$$\left. \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{array} \right\} \quad (B)$$

Telles sont les formules de Jean Bernoulli, données pour la première fois par Euler, son élève.

89. Théorème IX.— *Toute expression imaginaire* $a+b\sqrt{-1}$ *peut prendre la forme* $e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$.

Démonstration. — Par transformation trigonométrique dont l'argument est γ, et dont m est le module, posons

$$m(\cos\gamma + \sqrt{-1}\sin\gamma) = a + b\sqrt{-1} \qquad (1)$$

ce qui entraîne nécessairement les égalités

$$m = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dont l'une quelconque des deux dernières fournit la valeur de γ.

On a (nos 87 et 88)

$$e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = e^{\alpha}.e^{\beta\sqrt{-1}} = e^{\alpha}(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\alpha) \qquad (2)$$

Si l'on peut identifier les formes (1) et (2), il faut donc que

$$e^{\alpha}\cos\beta = m\cos\gamma$$

$$e^{\alpha}\sin\beta = m\sin\gamma$$

D'où l'on déduit aisément

$$(e^{\alpha})^2 = m^2 \quad , \qquad et \qquad e^{\alpha} = +\sqrt{a^2+b^2}$$

Le signe + doit *seul* affecter la racine carrée de a^2+b^2, attendu que cette racine doit être essentiellement positive.

En passant aux logarithmes, et en adoptant *log* comme caractéristique logarithmique *népérienne*, il viendra donc

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) \qquad (3)$$

Comme $e^{\alpha} = m$, il s'en suit que

$$\cos\beta = \cos\gamma \quad , \qquad et \qquad \sin\beta = \sin\gamma$$

Par suite, si n désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on a

$$\beta = 2n\pi+\gamma \qquad (4)$$

Et enfin, conformément à (3) et à (4),

$$a+b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + (2n\pi+\gamma)\sqrt{-1}} \qquad (C)$$

c.q.f.d.

90. *Logarithmes imaginaires.* — La décomposition d'un type imaginaire, exécutée conformément à la loi précédente, conduit à dire que, *dans le système népérien le logarithme de* $a+b\sqrt{-1}$ *est l'exposant de* e *dans la formule* (C), (no 89); on écrit conséquemment

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + (2n\pi+\gamma)\sqrt{-1} \qquad (D)$$

n pouvant recevoir toutes les valeurs entières positives et négatives, le logarithme de $a+b\sqrt{-1}$ a un nombre illimité de valeurs.

91. Si l'on suppose $b=0$, *a pouvant être positif ou négatif*, il vient en désignant par

$$\log(a) = \tfrac{1}{2}\log(a)^2 + (2n\pi + \gamma)\sqrt{-1}$$

Particularisons ces deux cas et soit d'abord

1° *a positif;* les formules (n° 89) qui déterminent la valeur de γ, apprennent que $\gamma=0$; donc, en désignant par k le nouveau nombre a, essentiellement positif,

$$\log(k) = \log k + 2n\pi\sqrt{-1}$$

les parenthèses entre lesquelles le nombre k se trouve enfermé indiquent que le logarithme doit pouvoir recevoir toutes les déterminations possibles, parmi lesquelles il n'y en a qu'une seule qui soit réelle, et que l'on obtient en faisant $n=0$

2° Soit *a négatif* et égal à $-h$, et les formules

$$\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad et \quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

donnant $\gamma=\pi$, on obtient

$$\log(-h) = \log h + (2n+1)\,\pi\sqrt{-1}$$

ce qui prouve qu'une quantité négative n'a pas de logarithme réel.

En faisant $h=k=1$, on trouve

$$\log(+1) = 2n\ .\ \pi\sqrt{-1}$$
$$\log(-1) = (2n+1)\pi\sqrt{-1}$$

92. Les développements de A^x et de e^x prouvent que

$$e^{x\log A} = A^x \qquad (1)$$

Et disons que toute expression imaginaire $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ propre à vérifier l'égalité,

$$A^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = a+b\sqrt{-1} \qquad (2)$$

est le *logarithme imaginaire*, pris dans le système dont la base est A, de $a+b\sqrt{-1}$.

Dans (1) changeons x en $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et il viendra

$$e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\log A} = a+b\sqrt{-1} \qquad (3)$$

Les logarithmes népériens des deux membres de (3) donnent

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\log A = \log(a+b\sqrt{-1})$$

D'où

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{\log(a + b\sqrt{-1})}{\log A}$$

Adoptant la notation $\log_A$ pour désigner le logarithme pris dans le système A, d'un nombre quelconque, on aura

$$\log_A(a + b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a + b\sqrt{-1})}{\log A} \qquad (4)$$

D'où l'on conclut :

Le logarithme, dans un système A, d'une quantité quelconque est le quotient du logarithme népérien de cette quantité par le logarithme népérien de la base A.

93. Pour des systèmes dont les bases sont A et A' on aurait donc, par l'intermédiaire du système *népérien*,

$$\log_A(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a+b\sqrt{-1})}{\log A}$$

$$\log_{A'}(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a+b\sqrt{-1})}{\log A'}$$

D'où, par division membre à membre,

$$\log_{A'}(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log A}{\log A'}\log(a+b\sqrt{-1})$$

On déterminera donc le rapport des logarithmes népériens des deux bases, en prenant pour dividende le logarithme de l'ancienne base, *et l'on multipliera ce rapport par le logarithme, pris dans l'ancien système, de la quantité* $a + b\sqrt{-1}$.



TROISIÈME PARTIE.

I.

DÉFINITION DE L'ALGÈBRE ; CARACTÈRE ESSENTIEL DE CETTE SCIENCE.

Définition de l'Algèbre. — Deux grandes divisions de la science générale de l'étendue. — Échelle unique continue des quantités tant positives que négatives. — Considérations sur les vices que présentent la plupart des traités d'Algèbre par l'adoption *imprudente* de postulatums et de nombreuses conventions littérales, indépendantes les unes des autres. — Correspondance immédiate, quant aux deux modes de génération de la grandeur, entre le concret et l'abstrait.

94. Les deux parties précédentes ayant établi, d'une manière *complète*, la signification des quantités algébriques, il est permis actuellement de dire :

L'Algèbre est la science des nombres dont l'expression analytique caractérise le mode et le sens de génération.

Cette définition donne à cette partie des sciences mathématiques l'acception la plus large ; elle explique et justifie la qualification, si souvent critiquée,

d'*Arithmétique universelle*

que Newton avait donnée à l'Algèbre : si l'Arithmétique est, en effet, la science des nombres considérés d'une manière absolue, c'est-à-dire abstraction faite de toute espèce de génération, l'Algèbre est la science des nombres qui, pris dans le sens le plus général et le plus complet, déterminent et rappellent, par des *signes conventionnels*, le mode suivant lequel la grandeur a été formée.

Cette branche fondamentale se sépare ainsi très-nettement des

deux grandes subdivisions de la *science générale de l'Etendue*, savoir :

1° La *Géométrie* qui étudie les modifications diverses que peuvent produire les générations par translation et par rotation ; il est clair toutefois que les propriétés que l'on découvre sont obtenues en *particularisant* le développement linéaire ou angulaire.

2° La *Géométrie* ALGORITHMIQUE qui isole chaque condition d'une question, et donne à ses solutions le caractère de la généralité la plus étendue, en appelant à son aide une réduction convenable du concret à l'abstrait.

95. La dénomination de *Géométrie analytique* est des plus vicieuses, en ce que très-souvent, elle n'est qu'un *contre-sens*, très-apparent en présence de l'emploi qu'on en fait pour distinguer des procédés de calculs ou de démonstrations obtenues à l'aide des signes algébriques.

La *méthode synthétique* est celle où par voie de composition, ou de déduction continue, on établit une vérité élémentaire pour passer à d'autres plus complexes, qui ne sont que des transformations et des modifications successives de la première, pour finir ainsi par démontrer la proposition qui était l'objet des recherches.

La *méthode analytique* procédant, au contraire, par décomposition, détermine les relations qui découlent des éléments généraux d'une question ; elle examine ensuite comment ces relations se modifient, en vertu de certains états particuliers, supposés ou donnés, de ces mêmes éléments ; elle rencontre ainsi la vérité cherchée et souvent en voit surgir beaucoup d'autres de grande importance. On comprend, d'après cela, que l'on peut très-bien faire de l'*analyse* avec des *figures géométriques*, et de la *synthèse* avec des *figures algébriques ;* et souvent il arrive que des démonstrations *décorées* du nom d'*analytiques* sont au contraire, des démonstrations synthétiques.

96. On est donc parfois très-loin de la Géométrie dite analytique, alors que l'on a recours aux spéculations algébriques ; sans nous étendre davantage ici sur ce sujet, nous dirons cependant qu'il existe une Géométrie qui, sans abandonner le *cachet de la synthèse la plus absolue*, introduit les signes dans l'expression de ses calculs et de ses résultats : M. CHASLES, en effet, dans son *Traité de Géométrie supérieure* établit et maintient la distinction *essentielle* entre les voies synthétique et analytique ; il fait usage des signes de l'Algèbre sans dévier de la synthèse. A cet égard nous dirons seulement qu'il reste, en *Géométrie générale*, à séparer d'une manière *absolue* la partie *ana-*

lytique proprement dite de la partie synthétique ; la Géométrie *élémentaire* recevra, sans doute, un certain développement, devenu indispensable dans l'état actuel de la science, mais la géométrie *algorithmique*, dégagée ainsi d'une foule d'entraves, étrangères à son esprit, développera des théories qu'elle a trop longtemps déjà abandonnée à l'*Analyse des calculs transcendants*.

Cet ordre d'idées domine l'exposition des traités que nous publierons, très-prochainement, sur la Géométrie élémentaire et sur la Géométrie algorithmique.

97. La considération *nécessaire* des directions opposées suivant lesquelles la translation agit dans la formation des grandeurs, a introduit, comme nous l'avons vu, les notations propres aux quantités positives et aux quantités négatives.

Il arrive sans cesse que l'Algèbre emploie des quantités qui, sous l'influence des variables dont elles dépendent, passent d'une manière *continue*, du positif au négatif.

La continuité exige alors que la quantité, qui subit ces fluctuations, passe par l'origine de translation, en cessant d'exister à cet instant ; et c'est pour caractériser analytiquement ce résultat que l'on emploie le *signe* 0 *auquel il faut par conséquent se garder d'appliquer la signification et le nom de nombre.*

Théorème.— *Une quantité négative est relativement d'autant plus petite, que sa valeur absolue, ou arithmétique, est plus grande.*

1re *Démonstration.* Soit OAX le sens positif de translation, à origine O, et supposons que l'on veuille transporter cette origine en A : soient deux points quelconque P et P′ situés entre O et A, et posons

O P′ P A X

$$AO = n\,, \quad AP = \alpha\,, \quad PP' = i$$

n, α et i exprimant les longueurs des droites AO, AP et PP′ en fonction d'une unité linéaire *quelconque* on a évidemment,

$$OP' < OP$$

$$OA - AP' < OA - AP$$

$$OA - (AP + PP') < OA - AP$$

ou encore

$$n - (\alpha + i) < n - \alpha$$

que l'on peut d'ailleurs écrire, en se fondant sur la règle d'addition,

$$n + [-(\alpha + i)] < n + [-\alpha]$$

Et pour satisfaire à cette inégalité, il faut que

$$-(\alpha + i) < -\alpha \qquad (1)$$

Cette dernière relation, qui établit le théorème proposé, subsiste encore lorsque l'on suppose α nul, puisqu'aulieu de O P' < O P, on a O P' < O A ; par suite on voit (zéro ne pouvant être affecté d'aucun signe) que $-i < o$.

2me *Démonstration.* Considérant les nombres négatifs comme restes d'une soustraction $a - b$ dans laquelle le diminueur est plus grand que le diminuende, et supposant que a étant *constant*, b soit au contraire variable, il est clair que *plus le diminueur b augmente, plus le reste diminuera*; pour $b > a$ on peut donner au reste la forme *explicite* d'une quantité négative, en écrivant

$$reste = -(b - a)$$

Dès lors il devient évident que, ce reste décroissant lorsque b augmente, *tout nombre négatif est d'autant plus grand que sa valeur* ABSOLUE *numérique est moindre.*

3me *Démonstration.* Au point de vue philosophique on peut dire: La formation ou la composition des grandeurs étant dénotée par le signe +, la déformation, dénoncée par le signe —, sera d'autant plus grande et plus puissante qu'il y aura d'éléments, d'unités sur lesquelles la décomposition aura porté.

La quantité $-(\alpha + i)$ indique donc une déformation plus complète que la quantité $-(\alpha)$; et comme *la grandeur* DIMINUE *à mesure que la décomposition agit sur un plus grand nombre d'unités*, la relation (1) devient manifeste.

98. Les quantités négatives entières forment donc, en vertu de (1) et (2) la suite croissante

$$-n, -(n-1), -(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1$$

Et il est bon de remarquer que 0 est la *limite* supérieure de cette suite, mais que *cette limite ne peut jamais être atteinte.*

De sorte que les quantités positives et négatives fournissent l'échelle suivante continue et graduelle, dans laquelle 0 est la LIMITE *inférieure* des premières et la LIMITE *supérieure* des dernières :

$$-(n+1), -n, \ldots. -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \ldots. +n, +(n+1)$$

99. Par diverses démonstrations directes du théorème précédent nous permettons d'éviter, selon les divers points de vue auxquels on peut se placer, l'écueil contre lequel sont venus se briser les auteurs des meilleurs traités d'Algèbre : MM. Lefébure de Fourey, Mayer et Choquet, J. Bertrand multiplient les conventions sans nécessité, et

exposent souvent ainsi l'élève à beaucoup de dangers, dont le moindre est quelquefois le dégoût, toujours l'obscurité et le doute.

Malgré notre profonde estime pour ces savants traités, qu'il nous soit permis de signaler quelques passages afin de montrer combien est réel le reproche que nous venons de formuler.

M. Lefébure s'exprime ainsi : (*Leçons d'Algèbre*, 6[me] édit., p. 10).

« Parce que les valeurs négatives viennent à la suite des nombres « positifs décroissants 3, 2, 1, 0, on convient de les regarder comme « plus petits que zéro ; et parce que les quantités négatives qui ont « une valeur absolue plus considérable viennent après celles qui « ont une valeur absolument moindre, on les regarde aussi comme « plus petites que ces dernières, etc. »

Dans le *Traité élémentaire d'Algèbre* de MM. Mayer et Choquet, on lit à la page 20 de la cinquième édition,

« Si d'un nombre tel que 10, par exemple, on retranche successivement les nombres 1, 2, 3, 4. . . . . . . 10, on obtiendra d'a- « bord des restes positifs de plus en plus petits, puis on parviendra « à un reste nul ; et en continuant à soustraire du même nombre 10 « les nombres 11, 12, 13, 14, ... on produira les quantités « négatives—1,—2,—3, ... On dit par cette raison, que *les* « *quantités négatives* DOIVENT ÊTRE REGARDÉES *comme étant plus petites* « *que zéro, et d'autant plus petites que leurs valeurs sont plus gran-* « *des*. Ce n'est là, du reste, qu'une convention, ou plutôt une forme « de langage dont l'utilité sera appréciée par la suite.

Chez M. Bertrand, (*Algèbre*, page 9), on trouve :

« La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'aide « d'une *convention* très-utile en Algèbre, qui consiste à regarder « tous les termes d'un polynome comme *ajoutés* les uns aux autres, « en nommant *nombres négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. « Par exemple, on regardera la différence $a - b$ comme résultat « de l'addition de a avec — b,

$$a - b = a + (-b) \qquad (1)$$

« L'expression isolée (— b) n'acquiert pour cela aucune signifi- « cation, seulement on dit ajouter — b au lieu de dire retrancher b. « On convient de même que retrancher — b signifie ajouter b.

$$a - (-b) = a + b$$

« Il serait absurde de chercher à démontrer les formules (1) et (2): « les définitions ne se démontrent pas.

Nous reconnaissons que le moyen imaginé par M. *Bertrand* est

simple et facile, mais il faut bien avouer aussi qu'aucune explication des règles d'addition et de soustraction, ne pourrait être moins satisfaisante.

En principe général, et au point de vue rigoureusement scientifique, nous déclarons que les *conventions* et les *postulatums* constituent un vice de doctrine: des *notations* sont souvent nécessaires, mais ces notations, qui ne sont pas du genre des *conventions* de MM. Lefébure, Mayer, Choquet, Bertrand, ne peuvent porter sur la NATURE DES GRANDEURS ; et des conventions ne doivent d'ailleurs être reçues que si elles sont sans influence sur les résultats.

C'est précisément contre ce dernier principe rigoureux que pèchent les conventions additives et soustractives de M. Bertrand.

Nous pourrions encore incriminer bien d'autres manières de voir de ce savant, entr'autres son établissement, *conventionnel* encore, de la règle des signes dans la multiplication, puis sa théorie des imaginaires ; mais nous avons voulu en relevant ici quelques erreurs graves, faire aussi comprendre par quelques citations, combien il est dangereux d'admettre aveuglément certaines productions dues à des hommes qui, à juste titre, font autorité dans la science.

Avec un ensemble de pareilles conventions, dont les opposées seraient il faut bien l'avouer tout aussi admissibles, que deviendrait l'exactitude et la rigueur mathématique ? En général on peut dire qu'*une science est mal établie dès que l'on doit recourir à un échafaudage de conventions indépendantes les unes des autres, et pouvant modifier la nature ou la valeur des résultats.*

100. Le fécond *principe des signes* de Descartes a donné à l'analyse supérieure une généralité et une puissance inconnues auparavant. — Mais Descartes a-t-il signalé la cause philosophique primitive de sa nouvelle loi, et a-t-il vu dans cette loi, transmise par lui comme *simple convention*, autre chose que la *consécration* du FAIT de la simultanéité des oppositions de directions et de signes dans l'ordre concret et dans l'ordre abstrait ?

Nous croyons pouvoir répondre NÉGATIVEMENT à ces questions et dire *qu'une révolution radicale et complète eut changé la constitution philosophique du vaste ensemble mathématique, si l'on s'était tout d'abord élevé jusqu'à l'idée* PREMIÈRE *de la génération des grandeurs :* La *Géométrie de position* de Carnot n'eut dès lors pas vu le jour, parce que sa raison d'être disparaissait en présence de la grande généralité qu'eut acquise immédiatement la *Géométrie ordinaire et élémentaire*.

M. Chasles *s'étonne* qu'on n'ait pas avant lui, étendu à la Géométrie pure, l'usage du *principe des signes de* Descartes, et l'on voit ainsi que l'ordre d'idées, où nous sommes placés, est aussi celui qui a inspiré à ce savant sa *Géométrie supérieure* avec laquelle s'ouvre une *Ere scientifique nouvelle;* seulement nous allons plus loin que M. Chasles et nous déclarons qu'il ne suffit pas, dans l'ordre concret de tenir compte d'un seul mode de génération, qu'il faut encore *introduire explicitement le second mode angulaire génératif,* et enfin qu'il est INDISPENSABLE de donner pour base à l'Algèbre la *correspondance immédiate* DANS CES DEUX MODES *entre le concret et l'abstrait.*

Dans un travail précédent (*) nous avons établi cette correspondance pour les Calculs transcendants: la science mathématique se trouve ainsi reliée dans toute son étendue par une seule et unique conception, et permet dès lors dans un ordre quelconque de spéculations, sans conventions ni paradoxes, le passage du concret à l'abstrait.

(*) Voir notre *Dissertation sur les vrais principes des Calculs transcendants.* — Liége. — H. Dessain. — Octobre 1860.

II

DUALITÉ DU SENS DANS LES QUESTIONS D'ALGÈBRE. — SYMBOLES.

Impossibilité de la solution d'un problème. — Questions d'un même genre, dont les directions de quelques éléments sont différentes ; caractère *spécial* de l'équation générale d'un tel ordre de questions. — Signification et vraie valeur des symboles $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$; $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\pm 0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$; $\infty \cdot \infty$; 0^0, ∞^0 ; ∞^∞ ; $1^{\pm\infty}$; $0^{\pm\infty}$. — Limite vers laquelle converge la somme des termes d'une progression factorielle décroissante, à mesure que le nombre des termes devient de plus en plus grand. — Dualité imaginaire ou de rotation.

101. De la signification restreinte incomplète et fausse attribuée jusqu'aujourd'hui aux signes + et —, et lorsque l'inconnue d'une question représente des grandeurs à déterminer, on a cru pouvoir dire que *les solutions négatives n'exprimaient aucune grandeur ;* dès lors on rejetait ces solutions en les considérant comme des *symboles d'impossibilité*.

Des questions de simple arithmétique ont, sans nul doute, donné naissance à l'Algèbre : c'est du reste ce que semblent prouver ces exercices anciens, ou espèces de défis, où l'on proposait de *deviner* des nombres auxquels on avait fait subir mentalement certaines transformations. Les nombres *pensés* étant ainsi essentiellement positifs, on ne trouvait que des *solutions positives ;* et si parfois il s'en produisait qui fussent *négatives* on les proclamait des *racines fausses :* de là cette qualification de symbole d'impossibilité appliquée à ces *fausses solutions*, dont le nom malheureux est encore employé par DESCARTES, qui avait cependant reconnu le vice d'une semblable dénomination.

Toutefois dans une foule de circonstances, il était évident que cette prétendue impossibilité ne pouvait être soutenue, et l'on était réduit à *discuter* ou plutôt à *interpréter* ces solutions.

102. Il est important de se faire une juste idée de ce que l'on doit entendre par *impossibilité d'une solution*.

Une équation est l'expression analytique des liaisons qui existent entre les données positives ou négatives et les inconnues, et si les racines sont ou doivent être regardées comme inadmissibles, c'est qu'évidemment les *conditions du problème ne sont pas compatibles entr'elles:* on est suffisamment instruit alors et la question doit être abandonnée comme *absurde*, en se gardant, à l'exemple de tous les autres, de faire subir à l'énoncé des modifications plus ou moins profondes dont aucune n'a sa raison d'être, et dont aucune n'est ni utile ni nécessaire.

Les solutions négatives n'ont pas seules le privilége d'être *parfois* un signe d'impossibilité, et les solutions positives ne présentent souvent aussi aucun sens possible: il se peut *à priori*, que les inconnues doivent être ou entières, ou comprises entre certaines limites suffisamment définies et déterminées par l'énoncé; dès lors si les racines de l'équation, bien que positives ou négatives, ne satisfont pas à ces conditions, la question n'a pas de sens acceptable.

Le plus souvent aucune de ces deux grandes conditions n'exprime l'état des racines : dès lors le signe $(+)$ d'une racine $(+a)$ exprimera que cette solution se compose de a unités, dont la *direction de translation* est précisément celle que l'on avait d'abord *adoptée* hypothétiquement; tandis que le signe $(-)$ d'une racine $(-a)$ ordonnerait de compter les a unités dans un sens inverse.

103. Théorème I.— *Lorsque deux questions ne diffèrent que par les directions de certains éléments, soient connus, soient inconnus, leurs équations ne diffèrent que par les signes des éléments analytiques correspondants.*

Démonstration. — Une équation doit être considérée comme *expression* d'égalité entre deux quantités ou grandeurs Q et Q′, dont l'énoncé de la question doit toujours, à moins d'incompatibilité, rendre possible l'existence *simultanée;* quant aux éléments de Q et Q′, ils sont fournis directement par ce même énoncé.

Il est donc clair que, si certains de ces éléments viennent à changer de direction, les changements introduits dans les expressions de Q et de Q′ ne proviendront que des changements de signes des éléments qui, par rapport à la question primitive, ont changé de direction : en effet ces changements peuvent modifier les expressions numériques de Q et de Q′, mais sont évidemment incapables

d'altérer la NATURE CONCRÈTE des GRANDEURS que Q et Q' représentent.

La nouvelle équation s'obtiendra donc en changeant, dans la première, les signes de tous les éléments dont les directions sont renversées : il faut remarquer que, dans ces modifications, les puissances de degrés pairs conservent leurs signes, tandis que celle de degrés impairs prennent seules des signes différents.

104. COROLLAIRE I. — *Lorsque deux équations ne diffèrent que par les signes d'une ou de plusieurs inconnues, les racines correspondantes,* NUMÉRIQUEMENT *égales deux à deux, ne diffèrent* ALGÉBRIQUEMENT *que par le signe.*

1[re] *Démonstration.* — Analytiquement cette vérité est facile à mettre en évidence.

Soient les deux équations données ,

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

$$f(-x, -y) = 0 \qquad (2)$$

qui renferment deux inconnues, et qui existent simultanément ; si l'on change

$$x \quad en \quad -x'$$

$$y \quad en \quad -y'$$

ces deux équations rentreront l'une dans l'autre, puisqu'elles ne différeront que par le changement de x en x' et de y en y', par suite si

$$x = \mp a$$

est racine de l'équation (1), on peut affirmer que les valeurs conjuguées

$$x' = \pm a$$

sont racines de l'équation (2), que l'on obtient en changeant dans (1) les signes de x et de y.

2[me] *Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du théorème qui vient d'être établi, car ces inconnues sont aussi des éléments de la question proposée, et puisque l'équation est la traduction analytique des conditions simultanées de cette question, les changements de signes imposés aux inconnues ou à quelques-unes d'entr'elles, répondent à des renversements de direction pour les éléments inconnus correspondants, sans altération de la valeur numérique.

105. Corollaire II. — *Les deux équations*

$$f(x, y, z.....) = 0 \quad et \quad fx(-, -y, -z.....) = 0$$

sont toujours simultanées.

ou en d'autres termes encore :

On obtient encore une équation, si l'on change les signes des diverses inconnues d'une équation donnée.

106. Tout renversement de direction dans quelques-uns des éléments connus ou inconnus d'une question, se traduisant analytiquement par un changement de signe des quantités algébriques correspondantes, il est permis de déduire de ce qui précède, cette propriété générale :

Théorème II.— *L'Équation et la formule-racine, expression immédiate des valeurs d'une inconnue, reçoivent en même temps diverses modifications qui, portant sur les signes, sont sans influence sur la composition analytique.*

Par suite aussi :

Théorème III.— *Si plusieurs questions ne diffèrent que par les directions de certains éléments, les équations qui leur appartiennent ne diffèrent que par les signes des quantités qui représentent ces éléments; de sorte alors qu'*UNE SEULE ÉQUATION SUFFIT COMME SOLUTION COMPLÈTE ; *de plus cette équation générale se* PARTICULARISE *ensuite pour chacune des modifications de la question, en tenant compte, par des changements de signes, des renversements qui seraient survenus dans les directions de certains éléments de la question primitive.*

Dans la mise en équation, on aura donc désormais à distinguer un *sens unitaire* de translation : on introduira ainsi des quantités positives et négatives qui donneront à la solution une *complète généralité* en permettant son appropriation à toute altération qui, dans la question proposée, n'affectera que la direction des éléments.

107. Après avoir déterminé *à priori*, comme il vient d'être fait plus haut, la signification rationnelle et immédiate des solutions positives et négatives, mettons en évidence, à l'aide d'un exemple appartenant au domaine ordinaire de l'Enseignement, l'utilité des propriétés générales qui viennent d'être établies.

Problème.— *Deux mobiles* M *et* M′ *se meuvent uniformément sur une droite indéfinie avec des vitesses données* m *et* m′ *; entre les instants où l'un* M *passe par un point* A, *et où l'autre* M′ *passe en un*

certain autre point B *déterminé, il y a une différence de* h *unités de temps. On connaît la distance* d *des points* A *et* B *et l'on demande de déterminer la position du point de rencontre des mobiles dans ce mouvement.*

Remarquons d'abord, quant à la signification du problème, que d'une part l'on n'indique pas dans quel sens les mobiles se meuvent, et que d'autre part, on ne précise nullement quel est celui de ces mobiles qui passe d'abord par le point qui lui est assigné sur la ligne du mouvement ; enfin l'énoncé ne se prononce pas davantage sur la relation d'égalité ou d'inégalité qui existe entre les vitesses m et m'.

Solution.— Le problème qui nous est ainsi présenté est donc un problème général dont la solution ne peut être abordée qu'en *particularisant* ses divers éléments : 1° nous supposerons, par exemple,

X———M(m) A ——— d ——— M'(m') B ——— R ———Y

que $m > m'$ les mobiles se meuvent dans le même sens $x\,y$, et que M passe en A avant que M' ne passe en B.

Soit M'R la distance inconnue x du point B au point R de rencontre qui, dans ce cas, *est situé à droite du point* B.

L'équation doit traduire le fait évident de l'égalité des *temps* employés par M et M' pour parcourir les distances du point R à des points où ces mobiles se trouvaient antérieurement au même instant. La distance

$$AR = d + x$$

exige pour être parcourue par M, un temps t fourni par la formule,

$$t = \frac{d+x}{m}$$

tandis que le chemin BR est parcouru par M' en un temps t', donné par,

$$t' = \frac{x}{m'}$$

Une différence de h unités de temps existant, d'après l'énoncé, entre t et t', on obtient l'équation,

$$\frac{d+x}{m} = \frac{x}{m'} + h \,, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{m'}{m-m'}(d-mh) \qquad (1)$$

qui résout le problème suivant :

Deux mobiles M *et* M′ *se meuvent uniformément et dans le même sens sur une droite indéfinie* XY *avec des vitesses respectives* m *et* m′ *telles que* m *est supérieur à* m′ : *sachant que le passage de* M *en un point donné* A *a lieu* h *unités de temps avant le passage de* M′ *en un autre point* B *donné, dont la distance à* A *est représentée par* d, *on demande en quel point de* XY *se fait la rencontre.*

Selon que $d-mh$ est positif ou négatif, la valeur de x est elle-même positive ou négative : dans le premier cas, le point de rencontre est situé à droite du point B ; dans le second, à gauche (n° 104) de ce même point.

2° Si le passage de M en A se fait h unités de temps après celui de M′ en B, il suffit de changer dans (1) le signe de h ; on obtient

$$\frac{d+x}{m}=\frac{x}{m'}-h, \quad d'où \quad x=\frac{m'}{m-m'}(d+mh) \qquad (2)$$

3° Si $m < m'$, les équations (1) et (2) deviennent

$$x=\frac{m'}{m'-m}(mh-d) \qquad (1')$$

$$x=-\frac{m'}{m'-m}(mh+d) \qquad (2')$$

Et l'on conçoit que l'équation (1′) donne un point R, situé à droite ou à gauche de B, selon que mh est plus grand ou plus petit que d ; tandis que (2′), qui est toujours négative, aura un point de rencontre qui est à la gauche de B.

4° Si les mobiles M et M′ se meuvent en sens contraire, leurs vitesses m et m' doivent être de signes différents et les équations (1) et (2) deviennent

$$\frac{d+x}{m}=-\frac{x}{m'}+h, \quad d'où \quad x=\frac{m'}{m+m'}(mh-d) \qquad (1_1)$$

$$\frac{d+x}{m}=-\frac{x}{m'}-h, \quad d'où \quad x=-\frac{m'}{m+m'}(mh+d) \qquad (2_1)$$

On comprend que (1_1) indique un point situé à droite ou à gauche de B, suivant que mh est supérieur ou inférieur à d ; de plus (2_1), ne donnant jamais que des valeurs négatives, montre que la rencontre a lieu à gauche de B.

DES SYMBOLES.

108. En considérant les eas où $m = m'$, on aura

$$x = \frac{m'(d - m\,h)}{0} \qquad (1_2)$$

$$x = \frac{m'(d + m\,h)}{0} \qquad (2_2)$$

$$x = \frac{m'(m\,h - d)}{0} \qquad (1'_2)$$

$$x = -\frac{m'(m\,h + d)}{0} \qquad (2'_2)$$

En général et lorsque $mh \gtrless d$, ees expressions sont de la forme

$$q = \frac{a}{0} \qquad (\alpha)$$

D'autre part, si $mh = d$ on obtient des quantités fractionnaires dont les deux termes sont simultanément nuls, et dont le type est

$$v = \frac{0}{0} \qquad (\beta)$$

Les expressions (α) et (β), conséquenees immédiates et néeessaires de la généralité attribuée à l'équation d'une question, n'offrent par elles-mêmes aucun sens, et leur interprétation est d'une indispensable néeessité : ee sont là les deux premiers *symboles analytiques* dont nous avons à nous oecuper.

109. *Des symboles* $\frac{0}{a}, \frac{a}{0}$ et $\frac{0}{0}$. — Considérons une fraetion

$$f = \frac{P}{Q}$$

dont les deux termes sont des quantités queleonques, fonetions d'une ou de plusieurs variables; admettons de plus qu'entre P et Q il existe *un plus grand commun diviseur* D, pour lequel

$$P = p\,D$$
$$Q = q\,Q$$

d'où

$$f = \frac{p\,D}{q\,D} = \frac{p}{q}, \qquad \textit{et} \qquad fq = p$$

La recherche de D est souvent très-pénible et donne lieu à des calculs qui deviennent bien longs pour des fonctions qui ne sont pas même bien compliquées : nous établirons bientôt *un procédé qui permet de trouver immédiatement la valeur* $\frac{p}{q}$ de $\frac{P}{Q}$

Actuellement, remarquons que quelques-uns des facteurs, dont se compose généralement la quantité D, pourraient devenir *simultanément nuls*, par suite de valeurs particulières assignées aux variables; on aurait dès lors,

$$f=\frac{0}{0}$$

tandis qu'en désignant par p' et q' les valeurs, acquises en cet instant par p et q, on devrait avoir

$$f=\frac{p'}{q'}$$

La forme $\frac{0}{0}$ n'est donc évidemment ici rien autre chose qu'un *accident algébrique*, et ne constitue qu'un embarras momentané que l'on éviterait TOUJOURS en réduisant la fraction proposée à sa plus simple expression, inconvénient qu'il s'agira plus tard d'éviter.

Considérons plus spécialement la forme réduite $\frac{p}{q}$ dont la détermination particulière est $\frac{p'}{q'}$,

La fraction $\frac{p'}{q'}$, peut se présenter dans différentes circonstances.

1[er] CAS. *Le numérateur* p' *est* SEUL *nul*, c'est-à-dire que

$$f=\frac{0}{q'}\,,\qquad d'où\qquad f\,.\,q'=0$$

Le produit de deux facteurs dont *l'un* q' *est différent de* ZÉRO ne pouvant être nul que si l'autre facteur est nul lui-même, on aura $f=0$; d'où

$$\frac{0}{q'}=0 \qquad (A)$$

110. 2me CAS. *Le dénominateur* q' *est* SEUL *nul*, ce qui donne la forme

$$f = \frac{p'}{0}\ , \qquad d'o\grave{u} \quad f \cdot 0 = p'$$

Mais dès que l'un des facteurs d'un produit $f \cdot 0$ est nul, le produit doit être nul : aucune valeur attribuée à f ne peut, par suite, donner p' pour produit, et l'on est forcé de proclamer *l'impossibilité* du facteur f.

Énonçons donc, à titre de principe :

*Toute quantité qui se présente sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est nul, est le symbole de l'*IMPOSSIBILITÉ.

Recherchons maintenant la cause de cette impossibilité.

Lorsque, dans une fraction, le numérateur est constant, et que le dénominateur *variable* décroît sans cesse *continuement*, en tendant indéfiniment vers *zéro*, il est clair que la valeur de la fraction croît continuement, et qu'il est aussi impossible d'assigner une *limite* à cet accroissement de valeur de la fraction, qu'il est impossible d'arriver à l'extrême petitesse du dénominateur.

Le quotient que représente cette fraction est donc IMPOSSIBLE *par suite d'accroissement illimité :* il est encore impossible, parce que le dénominateur, qui est le diviseur de la division correspondante, peut être conçu exprimant la valeur des parties égales dans lesquelles doit être partagé le numérateur ; le quotient étant alors la quotité des parties égales, ainsi définies, ce serait une véritable *aberration d'intelligence* que de voir dans ce quotient *un nombre plus grand que tout nombre imaginable.* D'ailleurs il ne faut jamais perdre de vue, sous peine de s'égarer dans les nuages d'une métaphysique *incohérente*, que

Les mathématiques étudient les grandeurs aux seuls points de vue de la valeur, de la forme et de la position, et que toute spéculation mathématique est *interdite* A PRIORI si la comparaison à l'unité conduit à un résultat qu'il est impossible de définir numériquement : toutes les fois qu'une quantité n'est pas susceptible de génération par voie d'addition de ses parties, elle ne peut donner lieu à une évaluation quelconque dont il soit possible de déduire un nombre ; les mathématiques s'arrêtent alors que cesse *forcément* la conception de la mesure des grandeurs.

C'est donc une *hérésie* de s'exprimer ainsi

$\frac{a}{0}$ est un NOMBRE INFINIMENT GRAND.

En effet nous venons de prouver, en partant des idées fondamentales les plus simples que ce *prétendu* nombre n'existe pas.

Que l'on dise $\frac{a}{0}$ est le symbole de l'INFINI, nous voulons bien le tolérer, si, restant complètement en dehors de la *monstrueuse idée* de l'existence de l'infini, on regarde dans cette locution les expressions *infini* et *impossible* comme SYNONYMES.

On est convenu de représenter analytiquement le symbole $\frac{a}{0}$ par le signe ∞, et d'écrire ainsi

$$\frac{a}{0} = \infty$$

111. 3me CAS. — *Le numérateur* P *et le dénominateur* Q *peuvent être* NULS SIMULTANÉMENT, ce qui donne

$$f = \frac{P}{Q} = \frac{0}{0}$$

En général on a

$$f \, . \, Q = P$$

par suite et dans ce cas,

$$f \, . \, 0 = 0$$

Or dès que l'un des facteurs d'un produit $f \, . \, 0$ est nul, le produit l'est également, quelle que soit du reste la valeur numérique ou algébrique : il est donc clair que f peut recevoir toutes les valeurs imaginables sans que cette dernière égalité cesse d'être satisfaite, et c'est précisément ce qui a fait dire que *l'expression* $f = \frac{0}{0}$ *est le symbole de l'indétermination.*

Toutefois il faudrait se garder de proclamer cette indétermination toutes les fois que, pour une valeur déterminée a de la variable x on aurait à la fois,

$$P_a = 0 \quad et \quad Q_a = 0$$

car il se pourrait que $x = a$ rendit nul le plus grand commun diviseur D entre P et Q, sans donner en même temps (n° 109),

$$p_a = 0 \quad et \quad q_a = 0$$

Si pareille circonstance se présentait, comme il est évident que

$$f=\frac{P}{Q}=\frac{pD}{qD}=\frac{p}{q}$$

on aurait à simplifier par D la fraction proposée, et à prendre pour vraie valeur cherchée, celle que l'on obtient en faisant $x=a$ dans p et q ; on trouverait ainsi,

$$f=\frac{p_a}{q_a}$$

et l'on comprend que cette fraction peut être *numérique*, *nulle* ou *infinie*.

112. *Vraie valeur des fonctions qui se présentent sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Supposons que P et Q soient des fonctions, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, d'une même variable x, et s'évanouissent en même temps pour $x=a$; supposons de plus, afin que la règle que nous allons trouver ait toute la généralité possible, que les n premières dérivées de même ordre de P et de Q soient aussi et à la fois *nulles* pour cette même valeur particulière a de x.

En représentant par h un accroissement très-petit, qui converge continuement vers zéro, on aura (*), μ étant une quantité plus petite que 1,

$$f=\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(a+\mu h)}{\psi^{(n+1)}(a+\mu h)}$$

Faisant maintenant $h=0$, il vient :

$$f=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{\psi^{(n+1)}(a)}$$

De là résulte ce théorème :

Le rapport de deux fonctions s'évanouissant en même temps pour une certaine valeur attribuée à la variable, est égal au rapport des valeurs acquises respectivement par les deux premières dérivées de même ordre, qui cessent de s'évanouir à la fois.

Si une seule des dérivées de l'ordre $n+1$ s'évanouit encore, la vraie valeur de la fraction sera l'une des suivantes :

$$f=\frac{0}{\psi^{(n+1)}(a)}$$

$$f=\frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{0}$$

(*) Voyez notre TRAITÉ D'ALGÈBRE. (*Calcul des dérivées*, formule de *Taylor*).

On voit donc (n° 109) que f est alors *nul*, et (n° 110) que f' est *impossible* ou *infini*.

Si $n = 0$, ce qui signifie que les dérivées premières $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ ne sont pas nulles chacune pour $x = a$, on aura :

$$f'' = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

115. *Du symbole* $\frac{\infty}{\infty}$. — Si les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ deviennent *infinis* pour $x = a$, on obtient la nouvelle expression

$$F = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

à laquelle on peut donner la forme,

$$F = \frac{\frac{1}{\psi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}}$$

Et comme $\frac{1}{\varphi a}$ et $\frac{1}{\psi a}$ sont nuls dès l'instant que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont infinis, il est clair que le symbole $\frac{\infty}{\infty}$ revient à $\frac{0}{0}$, et qu'en vertu de cette dernière forme, on aura pour vraie valeur de F, par dérivation de ses deux termes :

$$F = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\frac{1}{\psi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}} = \frac{\frac{\psi'(a)}{\psi^2(a)}}{\frac{\varphi'(a)}{\varphi^2(a)}} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \cdot \frac{\varphi^2(a)}{\psi^2(a)}$$

d'où

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

conséquemment la propriété dérivatrice (n° 112) est encore applicable au cas où les deux termes d'une fraction sont simultanément *infinis*.

114. Il pourrait se faire que toutes les dérivées de même rang fussent en même temps ou nulles, ou infinies pour $x = a$; dans ce cas on sera réduit à déterminer par des artifices de décompo-

sition algébrique, le plus grand commun diviseur qui pourrait exister entre les deux termes de la fraction.

Cette circonstance se présente, par exemple, dans

$$f=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

fraction dont les deux termes sont *nuls* pour $x=a$, et dont les dérivées de même ordre de ces termes sont *infinies* pour cette valeur particulière de la variable.

En regardant $x-a$ comme étant la différence de deux carrés, on pourra écrire

$$f=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}{\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}$$

Si l'on dégage en numérateur et en dénominateur le facteur $\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, il viendra :

$$f=\frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}{\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}}$$

et actuellement si l'on fait $x=a$, on trouve pour vraie valeur,

$$f=\frac{2\sqrt{2\sqrt{a}}}{\sqrt{2a\,.\,2\sqrt{a}}}=\frac{2}{\sqrt{2a}}$$

115. *Du symbole* $0.\infty$. — Si le produit

$$p=\varphi(x)\,.\,\mathrm{F}(x)$$

prend la forme $0.\infty$, par suite de ce que la valeur $x=a$, donne

$$\varphi(a)=0 \quad et \quad \mathrm{F}(a)=\infty$$

on pourra transformer le produit p comme suit,

$$p=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\mathrm{F}(x)}}=\frac{\mathrm{F}(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

et il est clair que la quantité p, considérée sous l'une ou sous l'autre de ces deux dernières formes fractionnaires, revient à l'un ou à l'autre des symboles $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

116. *Du symbole* $\infty \pm \infty$. — Soit la fonction

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

qui fournit

$$s_a = \varphi(a) \pm \psi(a) = \infty \pm \infty$$

Il s'agit de déterminer s_a ; à cet effet transformons comme suit l'expression fonctionnelle s,

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x) = \frac{\varphi^2(x) - \psi^2(x)}{\varphi(x) - \psi(x)}$$

Si l'on divise les deux termes de cette fraction par le produit $\varphi^2(x) \cdot \psi^2(x)$ des carrés des fonctions données, il vient

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi^2 x} - \frac{1}{\varphi^2(x)}}{\frac{1}{\varphi(x) \cdot \psi^2(x)} - \frac{1}{\psi(x) \cdot \varphi^2(x)}}$$

L'introduction de $x = a$ conduit dès lors à,

$$s = \varphi(a) \pm \psi(a) = \frac{\frac{1}{\psi^2(a)} - \frac{1}{\varphi^2(a)}}{\frac{1}{\varphi(a) \cdot \psi^2 a} - \frac{1}{\psi(a) \cdot \varphi^2(a)}}$$

et par suite

$$s = \infty \pm \infty = \frac{0}{0}$$

117. *Du symbole* $\infty \cdot \infty$. — Lorsque le produit $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ peut, pour $x = a$, affecter la forme $\infty \cdot \infty$, on trouvera aisément,

$$\varphi(a) \cdot \psi(a) = \infty \cdot \infty = \infty$$

Il suffirait en effet, pour rendre cette vérité évidente, d'écrire

$$\varphi(x) \cdot \psi x = \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{\psi(x)}}$$

118. *Des symboles* 0^0, ∞^0, ∞^∞. — Soit l'exponentielle

$$q = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

Pour des valeurs particulières de x, on conçoit que cette fonction puisse prendre les formes, 0^0, ∞^0, ∞^∞ : dès lors il devient nécessaire de rechercher les vraies valeurs de ces nouvelles expressions symboliques.

Le passage aux logarithmes fournit aisément, e étant la base népérienne,

$$\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \cdot \log \varphi(x)$$

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \cdot \log \varphi(x)}$$

Cette dernière relation ramène la question à *la recherche de la vraie* valeur du produit $\psi(x) \cdot \log \varphi(x)$ de deux fonctions, et comme cette recherche a été faite précédemment, on doit considérer le problème proposé comme étant résolu.

Selon les valeurs nulles ou infinies que peuvent recevoir simultanément $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on aura donc

$$0^0 = e^{-0.\infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\infty^0 = e^{0.\infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \infty \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\infty^\infty = e^{\infty.\infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \infty \\ \psi(x) = \infty \end{cases}$$

Le produit $\infty \cdot \infty$ étant égal à ∞ (n° 117) on voit que $\infty^\infty = \infty$; d'autre part la signification de $0 \cdot \infty$ (n° 116) prouve 0^0 et ∞^0 peuvent avoir des valeurs quelconques, parmi lesquelles on verrait figurer tous les nombres positifs, négatifs ou imaginaires possibles.

119. Remarque. — C'est donc une grave erreur, *commise jusqu'aujourd'hui*, de démontrer que

$$0^0 = 1 \quad \textit{et} \quad \infty^0 = 1$$

c'est-à-dire de prétendre que les symboles 0^0 et ∞^0 n'ont qu'une seule et unique valeur 1.

Bien que la démonstration précédente rende cette erreur manifeste, il est peut-être utile d'ajouter quelques mots sur ce point important.

Des auteurs ont cru, dans a^0, pouvoir considérer a comme un excès : c'est là depuis Euler, l'hypothèse toute gratuite sur laquelle on établit une prétendue démonstration ; or, cette hypothèse ne peut être reçue, *à titre* général, car a, en convergeant vers zéro, peut avoir des formes bien différentes de celles d'un excès.

En un mot,

Le raisonnement d'Euler, reproduit par tant d'auteurs, serait irréprochable, si la fonction $x^{F(x)}$ restait continue lorsque x croît *continuement* par voie négative ou par voie positive ; or il n'en est

pas toujours ainsi, et, dès lors, *c'est une erreur de dire que* 0^0 *est constamment égal à l'unité.*

C'est ce que nous allons mettre en évidence, en partant de cette même fonction. Restant dans la plus complète généralité, soit

$$u = x^{F(x)}$$

$F(x)$ étant nulle pour $x = 0$. Passant aux logarithmes, on a

$$\log u = F(x) \cdot \log x$$

égalité qui montre que, pour $x = 0$, si l'on a toujours $0^0 = 1$, l'on a nécessairement

$$F(x) . \log x = 0$$

Voyons si cette relation est toujours vraie, pour toute fonction de x.
Soit par exemple la fonction

$$F(x) = \frac{1}{\log^m x}$$

qui, pour $x = 0$ (m étant positif et plus petit que 1), satisfait à la condition $F(x) = 0$; on aura

$$\log u = \frac{1}{\log^{m-1} x}$$

ou

$$\log u = \log^{1-m} x$$

et l'on voit aisément que le second nombre de cette expression, au lieu de converger vers zéro, *croît indéfiniment.*

Soit en second lieu, (m étant plus grand que 1),

$$F(x) = a^{-\frac{1}{x^m}}$$

et l'expression

$$\left(a^{-\frac{1}{x^m}}\right)^x = a^{-\frac{1}{x^{m-1}}}$$

qui, si l'on suppose x positif et convergeant vers zéro, converge continuement elle-même vers zéro.

On aura à la limite

Pour $m > 1$, $0^0 = 0$

» $m = 1$, $0^0 = a^{-\frac{1}{0^0}}$

» $m < 1$, $0^0 = 1$

Voilà donc une fonction qui donne 0 et 1 pour valeurs du symbole 0^0 : mais il se présente ici une remarque d'une grande importance attendu qu'elle prouve l'impossibilité de la seule et unique valeur 1 de a^0.

Pour $m = 1$, on a

$$0^0 = a^{-\frac{1}{0^0}} ,$$

Or si 0^0 était toujours égal à 1, il viendrait

$$1 = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \qquad et \qquad a = 1$$

conséquence évidemment absurde, puisque l'unité deviendrait égale à une fonction déterminée de la quantité *quelconque* a.

Enfin *et pour ne laisser aucun doute sur cette question*, faisons voir que le symbole 0^0 est une limite qui peut prendre une valeur quelconque dépendant de la fonction primitive dont il dérive.

Considérons l'identité

$$\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = a$$

dont le premier nombre prend la forme 0^0 lorsque, a étant plus petit que 1, x converge vers zéro; il est évident que pour $x = 0$, l'on a

$$0^0 = a$$

ce qui prouve que

0^0 *peut avoir une valeur quelconque*

121. *Du symbole* $1^{\pm\infty}$. — L'exponentielle $\varphi(x)^{\psi(x)}$ qui, comme nous l'avons vu (n° 118), donne

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \log \varphi(v)}$$

se présente sous la forme $1^{\pm\infty}$, lorsque pour $x = a$, on a

$$\varphi(a) = 1 \qquad d'où \qquad \log \varphi(a) = 0$$

$$\psi a = \pm \infty$$

On aura ainsi

$$\varphi(a)^{\psi(a)} = e^{\psi(a) \log \varphi(a)} = 1^{\pm\infty} = e^{\pm 0 \cdot \infty}$$

La question est donc ramenée à trouver (n° 115) la vraie valeur du produit $\psi(x) . \log \varphi(x)$ de deux fonctions, alors que par suite d'une valeur particulière de x, ce produit se présente sous la forme $\pm 0 . \infty$.

122. *Du symbole* $0^{\pm\infty}$. — La même exponentielle affecte la forme 0^{∞} lorsque

$$\varphi(a) = 0 \quad et \quad \psi(a) = \infty$$

Dès lors on a

$$\varphi(a)^{\psi(a)} = e^{\psi(a) \log \varphi(a)} = 0^{\infty} = e^{\infty(-\infty)} = \frac{1}{e^{\infty \cdot \infty}}$$

Mais on a vu (nº 117) que $(\infty \,.\, \infty)$ est *infini*, donc :

$$0^{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Enfin, si $\varphi(a) = 0$ *et* $\psi(a) = -\infty$, il viendra

$$0^{\infty} = e^{\infty \cdot \infty} = \infty$$

123. *Observation.* — Dans la détermination numérique des valeurs de 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, et lorsque l'on aura à développer une puissance de e, il faudra faire usage de la formule connue, déjà employée et généralisée (nº 85) pour θ quelconque, réel ou imaginaire,

$$e^{\theta} = 1 + \frac{\theta}{1} + \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^3}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{\theta^n}{[n]}$$

124. Progression décroissante illimitée. — On lit dans l'Algèbre de M. L. Lefebure de Fourcy, (page 246, 6ᵐᵉ édition. — Paris) :

Si l'on prolonge à l'infini une progression géométrique décroissante, la somme des termes est égale au quotient du premier, divisé par l'unité moins la raison.

Beaucoup d'auteurs se sont cru autorisés à suivre et à répéter cet énoncé qui n'est rien autre chose qu'une *hérésie*, capable à elle seule de fausser le jugement mathématique du jeune élève à qui on développe une semblable doctrine.

C'est ce que très peu de mots feront saisir :

Une série quelconque est une suite de termes, qui se déduisent les uns des autres d'après une loi déterminée et constante, et il est incontestable que proposer de faire la somme des termes d'une série dont le nombre des termes est illimité, est une question qui ne présente aucun sens possible, puisqu'il est évident que cette somme ne peut être formée par l'addition successive d'un nombre *fini*, *déterminé*, et par conséquent seul admissible dans le calcul, d'unités de même espèce. MM. Mayer et Choquet (*Traité élémentaire d'Algèbre*,

5[e] édition, page 243) semblent aussi méconnaître un tel principe lorsqu'ils disent,

La somme de tous les termes de la progression en nombre INFINI, *d'une progression géométrique décroissante* est RIGOUREUSEMENT ÉGALE à $\frac{a}{1-r}$

En s'exprimant de cette manière on expose l'élève à croire à l'existence de la *somme* ou du *total* d'un nombre illimité de quantités ; et c'est là une erreur grave dont il importe de faire la rectification,

Considérons la série élémentaire suivante, ou progression factorielle générale, à propos de laquelle l'erreur est si souvent reproduite et enseignée,

$$\div\!\div\ t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ t_{n-1}\ ,\ t_n$$

n étant le nombre des termes considérés dont la somme est représentée par S ; la raison étant q et la notation t^i désignant un terme quelconque en faisant passer i par toutes les valeurs entières comprises depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$; on sait que

$$S = \frac{t_n q - t_1}{1 - q}$$

Les puissances d'un nombre q PLUS PETIT QUE 1 décroissant indéfiniment, on peut, pour plus de facilité, écrire

$$S = \frac{t_1 - t_n q}{1 - q} \qquad (1)$$

On appelle LIMITE *d'une quantité, variant d'une manière continue, la valeur dont peuvent s'approcher indéfiniment et d'aussi près qu'on le veut, les divers états particuliers successifs de cette variable :* il est important que cette définition soit bien comprise, et qu'on en fasse saisir l'application à l'expression (1).

Lorsque la raison q de la progression factorielle est moindre que 1, en vertu de la loi de formation

$$t_{i+1} = t_1 q^i$$

il est clair que t_{i+1} et q^i décroissent en même temps, et de telle manière que, *s'il était possible d'obtenir* pour une certaine valeur de n, et comme l'ont prétendu certains auteurs,

$$q^n = 0$$

on aurait, au même moment,

$$t_{n+1} = 0$$

S'il en était ainsi, comme

$$q^n = q^{n-1}.q$$

il faudrait que

$$q^{n-1} = 0$$

On prouverait de la même manière que les diverses puissances de q seraient alors nulles, et l'on parviendrait ainsi de proche en proche à trouver que $q = 0$.

Les termes de la progression factorielle décroissante, *convergent* donc *vers zéro*, ce qui signifie que *zéro* est la *limite* dont la valeur d'un terme diffère de moins en moins et d'aussi peu qu'on le veut, en considérant le rang du terme comme croissant indéfiniment.

Dès lors la somme S des termes tend *continuement* vers une autre limite qu'il importe de connaître, et que l'on obtient aisément en écrivant (1) sous la forme

$$S = \frac{t_1}{1-q} - \frac{q}{1-q}\, t_n$$

En passant a la limite, c'est-à-dire en considérant d'une part la limite zéro de laquelle s'approche indéfiniment t_n lorsque n croît sans limite, et d'autre part la limite vers laquelle converge alors la somme S des termes de la progression, on aura

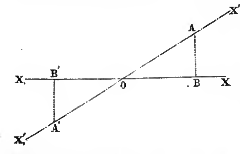
$$\lim\ S = \frac{t_1}{1-q}$$

On obtient ainsi, avec la plus grande rigueur, cette vérité:

La somme des termes d'une progression décroissante factorielle a pour limite le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.

Notons bien que cette limite, qui est complètement en dehors de la génération sommatoire de la progression, ne peut jamais être atteinte, puisqu'il faudrait pour cela que $t_n = 0$, ce qui a été démontré être impossible.

125. *Dualité imaginaire.* — Soient 0 l'origine commune de translation et de rotation, α l'angle des deux directions XOX_1 et $X'OX'_1$; en admettant que OX' soit le sens de translation positive, que $OA = l$, $OB = p$, $AB = q$, nous avons vu (n° 52) que la droite



OA est représentée analytiquement en grandeur et position, par $p + q\sqrt{-1}$

Si l'on considère les quantités p et q comme étant des variables, pouvant par conséquent recevoir toutes les valeurs possibles *conjuguées*, satisfaisant à la condition (n° 73),

$$p^2 + q^2 = l^2$$

il est clair que cette expression représentera successivement toutes les directions possibles autour du point 0.

De plus, nous avons vu (n° 44) que le signe du terme $q\sqrt{-1}$ peut être attribué à q en regardant comme constant et uniforme le sens déterminé de rotation, celui de droite à gauche, par exemple.

Dès lors demandons nous quels sont les *caractères de la dualité imaginaire* : remarquons d'abord que si les deux droites OA et OA' sont égales, on a

$$OB' = OB \quad et \quad AB = A'B'$$

pour passer de OA à OA', il faudra donc, à l'aide de la rotation, et en représentant par p' et q' les paramètres de la droite OA',

1° La translation de p unités de 0 en B' d'où l'on déduit

$$OB' = p' = -p$$

2° La rotation, à l'aide *d'un* seul mouvement normal, d'une longueur égale à AB; *cette longueur* qui doit prendre la position A'B', *a donc dû s'engendrer par translation dans le sens négatif*, de B' vers X_1 (n° 43) et par suite :

$$A'B' = q' = -q\sqrt{-1}$$

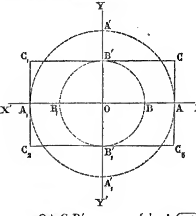
On a ainsi,

$$p' + q'\sqrt{-1} = -p - q\sqrt{-1}$$

Les imaginaires $p + q\sqrt{-1}$ et $- p - q\sqrt{-1}$ sont donc de directions opposées,
d'où l'on déduit :

Le changement de signes des paramètres entraine l'opposition de directions des imaginaires.

Cette loi est, comme on le voit, l'extension aux imaginaires obliques du principe des signes de Descartes, déja établi pour le cas des imaginaires normales.



126. Lorsque nous traitions (n° 49) de la multiplication des imaginaires de la forme $m\sqrt{-1}$, nous avons établi la signification *réelle* que les signes + et — ont dès qu'ils s'appliquent aux surfaces: en suivant le même mode de démonstration on trouverait que les rectangles

$$OA_1C_2B'_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = +ab$$
$$OA\ C\ B' \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = +ab$$

sont opposées au sommet, par rapport à l'origine, et qu'il en est aussi de même des deux autres rectangles

$$OB'C_1A_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = -ab$$
$$OB'_1C_3A \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = -ab$$

Dans ces deux groupes de rectangles les dimensions de mêmes noms sont évidemment des signes contraires : on voit de plus qu'il est permis de remplacer les dimensions imaginaires de ces rectangles par des dimensions réelles de la manière suivante,

$$OA_1C_2B' \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (-a)(-b)$$
$$OA\ C\ B' \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (+a)(+b)$$
$$OB'C_1A_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = (-a)(+b)$$
$$OB'_1C_3A \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (+a)(-b)$$

Le signe $\sqrt{-1}$ disparait ainsi et le coefficient multiplicateur conserve son signe, tandis que le coefficient multiplicande change de signe.

La même expression superficielle numérique réelle correspond donc toujours à deux rectangles opposés par le sommet, et dont les dimensions égales et de signes contraires sont respectivement dirigées suivant les axes de translation et de rotation.

Nous sommes entrés dans ces quelques détails sur le signe que peut posséder l'expression d'une surface afin de donner 1° à cette quantité algébrique le sens abstrait et concret le plus général possible; 2° à la règle des signes de Descartes son acception complète; 3° le moyen de passer dans une foule de cas du réel à l'imaginaire, et réciproquement.

127. Dans les deux premières parties de ce travail, nous avons exposé le point de vue nouveau qui, selon nous, doit dominer et diriger l'exposition élémentaire et philosophique de l'Algèbre : nous sommes parti de cette idée fondamentale que *les mathématiques étudient la quantité sous le triple aspect de la grandeur, de la position, et de la forme; nous avons successivement procédé à l'évaluation de la quantité à l'aide de son unité, puis à l'étude de sa génération soit par translation, soit par rotation.*

Chaque loi fondamentale, obtenue et établie à priori, se présente ainsi avec la rigueur scientifique que ne peut jamais donner une série de *conventions*, toutes indépendantes les unes des autres, arbitraires d'ailleurs dans leur essence, et en opposition desquelles on pourrait toujours offrir, sans désavantage, des conventions et des notations contraires.

Il reste à faire voir par quelques exemples, comment, jusqu'à quel point et avec quels avantages, le point de vue auquel nous nous sommes placés, se prête aux conceptions géométriques et analytiques en permettant avec rapidité le passage de l'abstrait au concret et réciproquement.

III

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

—

DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE.

Équations du point. — Équation de la droite; dualité imaginaire. — Équation d'une droite passant par un point donné. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit situé sur une droite. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est parallèle à une droite donnée. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, fait avec une droite donnée un angle connu. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est perpendiculaire à une droite donnée. — Équation d'une droite passant par deux points donnés. — Intersection de deux droites. — Condition de parallélisme de deux droites. — Le rapport des sinus de deux angles d'un triangle est égal au rapport des côtés respectivement opposés à ces angles. — Loi fondamentale de projection linéaire. — Distance d'un point à une droite.

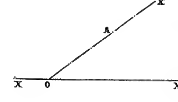
128. Équations du point. — Les équations ou les coordonnées d'un point quelconque sont évidemment les longueurs comptées d'une part sur l'axe de translation, à partir de l'origine, et, d'autre part, perpendiculairement à cet axe à partir de l'extrémité de la première longueur engendrée.

Les coordonnées d'un point sont ainsi, suivant les notations analytiques déjà si souvent définies précédemment,

$$a \quad \text{et} \quad b\sqrt{-1}$$

129. Équation générale de la droite. — 1° *Droite passant par l'origine*. — Nous avons fait voir (n° 52) que, si i est le *coefficient de direction* d'une droite, toute quantité de la forme

$$i = a + b\sqrt{-1}$$



représente une certaine longueur, tant en grandeur OA qu'en direction OX', alors que l'on compte la rotation à partir d'un point fixe O pris pour origine et d'un axe OX de translation.

En désignant par m le module $\sqrt{a^2+b^2}$ de cette imaginaire, par θ l'argument ou l'inclinaison de OX' sur OX, et en se rappelant toujours que m, n'exprimant qu'un seul nombre d'unités de longueur, *est essentiellement positif*, on a donné à l'imaginaire proposée, la forme (n° 72),

$$i = m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \qquad (1)$$

Des deux quantités θ et m, indépendantes l'une de l'autre, et que renferme le second membre de cette équation, la première θ, selon l'état *constant* ou *variable* qui lui est assigné, permet l'étude d'une droite, passant par l'origine O de rotation, et dont la direction serait *déterminée* ou *arbitraire*; la seconde, établit la position des divers points d'une droite OX' dont l'inclinaison θ sur OX est *particularisée*.

130. La dualité imaginaire exige (n° 125) que le prolongement de la longueur (1) ait pour équation

$$i = -m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

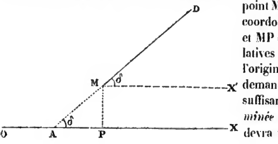
Et il est utile de remarquer, qu'au seul point de vue algébrique, l'équation (2) se déduit de (1) en changeant θ en $\pi + \theta$.

131. 2° *Droite qui ne passe pas par l'origine.* — Si la droite considérée ne passe pas par l'origine ou si l'origine, au lieu d'être en O, point de rencontre de OX' avec l'axe de translation, se trouve en X, et de telle manière que OX $= l$, il est clair que l'équation du chemin XOA sera,

$$i = l + m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \qquad (2)$$

Et cette équation est l'expression analytique, en grandeur et en direction, de la distance du point X à un point quelconque de OX', alors que l'on est obligé de passer par le point O de rencontre de la droite et de l'axe de translation.

132. Équation d'une droite passant par un point donné. — Soit le point M donné par ses coordonnées OP $= a$ et MP $= b\sqrt{-1}$, relatives à l'axe OX et à l'origine O. La droite demandée n'étant pas suffisamment *déterminée*, son équation devra renfermer une



arbitraire que nous supposerons être l'angle δ, fait par la droite AMD proposée avec l'axe OX, ou avec la parallèle MX' à cet axe, menée par le point M.

Le coefficient de direction de MD sur MX' sera donc, m étant quelconque,

$$m\,(\cos\delta + \sqrt{-1}\,\sin\delta)$$

Le triangle rectangle AMP apprend que

$$\text{AP} = \frac{\text{MP}\,.\,\sin\text{AMP}}{\sin\text{MAP}} \quad ou \quad \text{AP} = \frac{b\cos\delta}{\sin\delta}$$

par suite,

$$\text{OA} = a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

L'équation de la droite AMD sera donc

$$i = a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\,\sin\delta] \qquad (3)$$

133. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un point donné appartienne à une droite donnée.* — Soit $(p\,,\ q\sqrt{-1})$ le point donné, et

$$i = l + m\,[\cos\delta\,\sqrt{-1}\,\sin\delta] \qquad (\text{A})$$

l'équation de la droite donnée. Si l'on imaginait que par le point donné on ait mené une droite, dont l'argument est ϱ et dont l'équation est par suite, comme on vient de le voir,

$$i = p - q\,\frac{\cos\varrho}{\sin\varrho} + m\,[\cos\varrho + \sqrt{-1}\,\sin\varrho] \qquad (\text{B})$$

il est clair que le point où cette droite B coupe l'axe de translation est donné, dans l'équation (B), par la quantité $p - q\,\dfrac{\cos\varrho}{\sin\varrho}$: dès lors, pour que les droites (A) et (B) se confondent, il faut évidemment satisfaire à la première condition,

$$p - q\,\frac{\cos\varrho}{\sin\varrho} = l\ , \quad d'où \quad \tan\varrho = \frac{q}{p-l} \qquad (\text{C})$$

et ensuite à la seconde condition,

$$\varrho = \delta$$

Il faut donc que l'angle déterminé par l'équation (C) soit précisément égal à l'argument de la droite donnée (A).

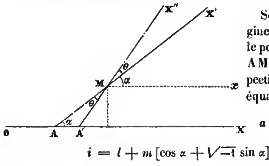
134. ÉQUATION D'UNE DROITE QUI, PASSANT PAR UN POINT DONNÉ, EST PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE. — Soit l'équation

$$i_1 = L + m\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta]$$

de la droite donnée. L'équation de toute droite menée par le point donné (a et $b\sqrt{-1}$) a nécessairement la forme (3, n° 132), et il suffira de changer δ en θ pour obtenir l'équation cherchée,

$$i = a - b\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + m\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta] \qquad (4)$$

135. ÉQUATION D'UNE DROITE QUI, PASSANT PAR UN POINT DONNÉ, FAIT AVEC UNE DROITE DONNÉE UN ANGLE CONNU.



Soient pour l'origine O et l'axe OX, le point M et la droite AMX′ donnés respectivement par leurs équations

$$a \quad , \quad b\sqrt{-1}$$

$$i = l + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$

En prolongeant jusqu'à l'axe de translation les droites MX′ et MX″, dont la seconde MX″ doit faire avec MX′ l'angle θ donné, on forme un triangle AA′M, qui fournit

$$\widehat{X''A'X} = \alpha + \theta$$

L'inclinaison de MX″ sur l'axe étant ainsi déterminée, il suffira dans l'équation (3, n° 132) de remplacer δ par $\alpha + \theta$, et l'on obtiendra,

$$i = a - b\,\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)] \qquad (5)$$

L'argument α est donc augmenté de l'angle θ fait par la droite demandée avec la droite donnée.

136. ÉQUATION D'UNE DROITE QUI, PASSANT PAR UN POINT DONNÉ, EST PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE. — 1° La droite donnée, *passant par le point donné* (a , $b\sqrt{-1}$), et ayant pour équation (3, n° 132),

$$i = a - b\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$

le coefficient de direction d'une droite qui lui est perpendiculaire s'obtiendra, en vertu de la signification du signe factoriel de perpendicularité, en multipliant par $\sqrt{-1}$ la quantité $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$; de telle sorte que la direction normale aura pour détermination,

$$m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

ou, après multiplication,

$$m\,[-\sin\alpha + \sqrt{-1}\cos\alpha]$$

expression dans laquelle la quantité entre crochets se déduit évidemment de $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$, par le changement de α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, dans l'équation de la droite donnée : dès lors,

$$\cos\alpha \quad \textit{devient} \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha \quad \textit{devient} \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

et l'équation demandée est

$$i = a + b\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \qquad (6)$$

2° La droite donnée étant représentée par

$$i = l + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

Et le point donné, qui peut en général ne pas appartenir à cette droite, étant défini par p et $q\sqrt{-1}$, l'équation de la perpendiculaire sera

$$i = p + q\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \qquad (7)$$

137. Équation d'une droite passant par deux points donnés. — Soient les deux points donnés

$$a\ ,\quad b\sqrt{-1}$$
$$a'\ ,\quad b'\sqrt{-1}$$

La droite demandée devant passer par *chacun* de ces points, il est clair que son équation de la forme (3) fournira les conditions

$$i = a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta]$$

$$i = a' - b'\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta]$$

Dans ces équations de condition, qui sont nécessairement simultanées, l'inclinaison δ inconnue est la même et se déterminera en posant

$$a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta} = a' - b'\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta}\ ,\qquad d'où\qquad \text{tang}\,\delta = \frac{b-b'}{a-a'},$$

d'où

$$\text{tang}\,\delta = \frac{b-b'}{a-a'},\ \sin\delta = \pm\frac{b-b'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}},\ \cos\delta = \pm\frac{a-a'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}}$$

L'équation de la droite passant par deux points donnés pourra donc être considérée sous l'une des deux formes

$$i = \frac{a'b-ab'}{b-b'} + m\left[\cos.\text{arc tang}=\frac{b-b'}{a-a'} + \sqrt{-1}\,\sin.\text{arc tang}=\frac{b-b'}{a-a'}\right] \quad (8)$$

$$i = \frac{a'b-ab'}{b-b'} \pm m\left[\frac{a-a'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}} + \sqrt{-1}\ \frac{b-b'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}}\right] \quad (9)$$

138. Intersection des deux droites. — Soient les deux droites AD, A'D' représentées par les équations

$$i_1 = l_1 + m_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)$$
$$i_2 = l_2 + m_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)$$

dans lesquelles $OA = l_1$ et $OA' = l_2$. Le point d'intersection R étant distant des points A et A' des quantités

$$AR = m_1 \quad \textit{et} \quad A'R = m_2$$

il est clair que les *directions* i_1 *et* i_2 *sont égales* relativement au point R, c'est-à-dire pour la ligne OR, et qu'ainsi l'on a

$$l_1 + m_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1) = l_2 + m_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)$$

Le théorème (n° 60) permet de déduire, de cette équation imaginaire, les deux autres réelles,

$$l + m_1\cos\alpha_1 = l_2 + m_2\cos\alpha_2$$
$$m_1\sin\alpha_1 = m_2\sin\alpha_2$$

et la résolution de ces deux équations donne immédiatement,

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}(l_2-l_1) \\ m_2 &= \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}(l_2-l_1) \end{aligned}\right\}(10)$$

139. *Condition du parallélisme de deux droites.* — Le point R ne pouvant plus exister, et bien que α_1 et α_2 aient des valeurs déterminées, il faut, m_1 et m_2 étant impossibles, que l'on ait

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \qquad d'où \qquad \alpha_2 = \alpha_1 \qquad c.q.f.d.$$

140. Théorème. — *Dans tout triangle les sinus des angles ont le même rapport que les côtés opposés.*

Démonstration. — Dans le triangle AA'R, (*fig.* du n° 138), on a

$$\widehat{ARA'} = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad et \qquad \widehat{AA'R} = \pi - \alpha_2$$

Les expressions de m_1 et m_2 deviennent dès lors

$$AR = \frac{\sin AA'R}{\sin ARA'} AA' \qquad ou \qquad \frac{\sin AA'R}{\sin ARA'} = \frac{AR}{AA'}$$

$$A'R = \frac{\sin A'AR}{\sin ARA'} AA' \qquad ou \qquad \frac{\sin A'AR}{\sin ARA'} = \frac{A'R}{AA'}$$

c.q.f.d.

141. Théorème. — *La projection d'une droite sur une autre est égale à la longueur projetée multipliée par le* cosinus *de l'angle fait par la droite avec sa projection.*

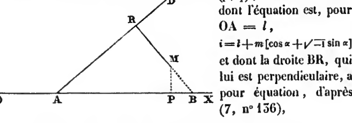
Démonstration. — Dans les formules (10, n° 138) posons

$$ARA' = \alpha_2 - \alpha_1 = 1^d, \quad d'où \quad \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 1 \quad et \quad \sin\alpha_2 = \cos\alpha$$

et il viendra,

$$AR = AA' \cdot \cos\alpha \qquad c.q.f.d.$$

142. Distance d'un point a une droite. — Soient le point M, (p, q), et la droite AD dont l'équation est, pour $OA = l$,



$$i = l + m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

et dont la droite BR, qui lui est perpendiculaire, a pour équation, d'après (7, n° 136),

$$i = p + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

Il vient donc

$$BO = p + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad d'où \qquad AB = p - l + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Mais (n° 141), on a

$$MP = BM \cdot \cos MBP \qquad d'où \qquad BM = \frac{q}{\cos \alpha}$$

et aussi

$$BR = AB \cdot \cos ABR \qquad d'où \qquad BR = AB \cdot \sin \alpha$$

enfin comme

$$MR = BR - BM$$

il vient, après substitution des valeurs de AB, BR, BM qui viennent d'être trouvées,

$$d = MR = (p - l) \sin \alpha - q \cos \alpha \qquad (11)$$

Afin de déterminer les coordonnées (x, $y\sqrt{-1}$) du point R, représentons AR par m_1 et BR par m_2 : il faudra, par combinaison des équations des droites AD et BR, satisfaire à la relation,

$$l + m_1 \cos \alpha + m_1 \sqrt{-1} \sin \alpha = p + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - m_2 \sin \alpha + m_2 \sqrt{-1} \cos \alpha$$

qui donne lieu (n° 60) aux deux équations de condition,

$$l + m_1 \cos \alpha = p + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - m_2 \sin \alpha$$

$$m_1 \sin \alpha = m_2 \cos \alpha$$

auxquelles, par rapport aux inconnues m_1 et m_2, il est bon de donner la forme,

$$m_1 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha = p - l + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$m_1 \sin \alpha - m_2 \cos \alpha = 0$$

La résolution très-simple de ces équations fournit

$$m_1 = AR = (p - l) \cos \alpha + q \sin \alpha$$

$$m_2 = BR = (p - l) \sin \alpha + q \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

d'où

$$x = p - [(p - l) \sin \alpha - q \cos \alpha] \sin \alpha$$

$$y = [(p - l) \cos \alpha + q \sin \alpha] \sin \alpha$$

IV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES PLANES.

—

Équations modulaire et polaire d'une ligne courbe. — Équation différentielle. — De la tangente; ses définitions dynamique et géométrique. — Signification géométrique de la dérivée polaire. — Équation de la tangente en un point donné d'une courbe. — Équation de la tangente menée par un point extérieur. — Équation de la tangente dont la direction est donnée. — De la normale ; équation d'une normale menée par un point de la courbe, par un point extérieur à la courbe, parallèlement à une droite donnée. — Dérivée de l'arc d'une courbe. — Signification géométrique de cette dérivée. — Cercle osculateur. — Rayon de courbure. — Centre de courbure. — Courbure d'une courbe en un point donné. — Développée d'une courbe.— Application des principes précédents à l'étude de quelques courbes.

143. *Équations modulaire et polaire d'une courbe.* — Si dans l'équation modulaire générale

$$i = m\left[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right] \qquad \text{(A)}$$

l'on regarde m et α comme étant des variables *simultanées* et qui dépendent l'une de l'autre, il est clair que cette équation, convenant, *pour une même origine* ou PÔLE donné, à une suite continue de points, sera celle d'une certaine courbe.

Cette *simultanéité* peut d'ailleurs être PARTICULARISÉE d'une manière quelconque, et *exige* comme complément indispensable *la détermination analytique de sa loi;* en d'autres termes, il faut connaître ou établir, dans chaque cas, *la relation* qui existe entre la valeur de α correspondant à un point de la courbe, et la distance de ce point au pôle, donné ou choisi dans le plan de la courbe : de là une seconde équation, que nous appellerons *équation polaire*, qui a la forme générale,

$$\alpha = \mathrm{F}\,(m) \qquad \text{(B)}$$

dans laquelle m ou le *rayon recteur* représente la distance d'un point de la courbe à l'origine.

144. *Équation différentielle d'une courbe.* — Pour une fonction continue, mais non linéaire, une loi spéciale régit ainsi les variations des accroissements finis Δm et $\Delta \alpha$ dépendant l'un de l'autre, imposés à m et à α : cette loi, qui persiste même à l'origine de ces accroissements et qui préside par suite à leur *génération simultanée*, reçoit pour ce motif, le nom de *loi de génération* (*) ; elle change à chaque instant et l'on ne pourrait admettre que pour une certaine variation Δm, quelque petite qu'on voulut d'ailleurs la supposer, le rapport $\frac{\Delta \alpha}{\Delta m}$ soit constant, puisqu'alors on supposerait que la fonction proposée est linéaire.

Cependant rien n'empêche de concevoir, hypothétiquement bien entendu, mais pour une valeur particulière et arbitraire de m, une autre fonction de la même variable *indépendante* m, dont le rapport $\frac{\Delta \alpha}{\Delta m}$ CONSTANT ET INVARIABLE, soit précisément égal à celui qu'assigne, pour *la fonction* $F(\alpha, m) = 0$ *continue et non linéaire*, la loi de génération appliquée à l'origine m des accroissements ; mais, dans le travail auquel nous venons de renvoyer, il a été démontré que, pour un certain intervalle de chaque côté de m, on a, lorsque α reçoit une valeur réelle quelconque,

$$\lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta m} = F'(m)$$

On a donc, relativement à la nouvelle fonction dont on représente par $d\alpha$ la variation angulaire,

$$d\alpha = \Delta m . F'(m) \qquad \text{(C)}$$

Bien plus, *et sans créer* EXPLICITEMENT cette seconde fonction, il est incontestable que l'*on peut supposer que la loi de génération qui, pour* $F(m)$ varie sans cesse, *persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à l'origine même des accroissements.*

La différentielle $d\alpha$ est alors devenue une vraie différence $\Delta \alpha$, et elle se trouve avoir pour expression la limite vers laquelle converge le second membre de l'équation générale,

$$\Delta \alpha = \Delta m \, [F'(m) + \mu]$$

lorsque Δm décroit indéfiniment.

(*) Voir notre *Dissertation sur les vrais principes des Calculs transcendants.* — Liége. — H. DESSAIN. — Octobre 1860.

En un mot, si l'on suppose que, pour la valeur de m, la loi de génération, au lieu de varier constamment, persiste dans sa valeur actuelle, l'on obtient la différentielle.

L'équation (C) *est l'équation différentielle de la courbe.*

La traduction en langage ordinaire de la condition exprimée analytiquement par l'équation différentielle se fait toujours immédiatement : dans l'étude des phénomènes soumis à la variation continue de certaines quantités, cette équation exprime ce qui se passe si l'on suppose que les grandeurs qui, jusqu'à un moment donné, ont été variables, deviennent subitement permanentes ; et c'est là une hypothèse très-simple et qu'il est toujours permis de faire.

145. *De la tangente.* — Voyons comment l'équation différentielle caractérise la nature intime de la courbe.

D'après ce que nous venons de rappeler et de dire, dans le numéro précédent, $F'(m)$ est constant pendant tout l'intervalle Δm ; on est donc amené à dire que *l'équation différentielle* (C) *caractérise, par les éléments explicites qui la composent, la* DIRECTION *d'une certaine droite passant le point défini par* α *et* m.

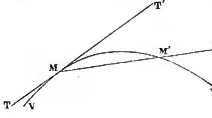
D'ailleurs comme le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta m}$ est *transitoirement* le même à l'origine m pour la fonction continue, il est évident que le déplacement initial du point générateur s'effectue, à partir du point considéré, d'après une droite dont la direction est fournie en ce point par le $\frac{d\alpha}{\Delta m}$ de l'équation différentielle.

C'est donc selon cette droite, que l'on a nommée *tangente* ou *touchante*, que commence le déplacement du point générateur, et *c'est* aussi *suivant elle que la continuité s'établit et se manifeste.*

On voit que l'on est ainsi forcément conduit à considérer ce qui se passe initialement en chaque point de la courbe, sur la tangente : pour consacrer cette acception nouvelle de l'étude d'une courbe, changeons Δm en dm, et prenons pour équation différentielle,

$$d\alpha = dm \,.\, F'(m)$$

146. Soient actuellement une courbe quelconque VV' dont, pour deux points M et M', on connaît l'angle que fait la sécante MM'S avec une droite fixe, arbitraire du reste, située dans le plan de la courbe.



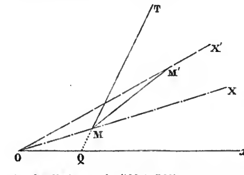
Pour saisir le fait de la continuité, il suffit d'imaginer que la corde MM′ décroît d'une manière CONTINUE et de considérer ensuite le *cas*-LIMITE pour lequel les points M et M′ viennent ainsi à se confondre : ce décroissement se réalise évidemment en faisant tourner la droite MS autour du point M, et l'on obtient dès lors en M une droite, dont la position spéciale toute particulière et caractéristique, n'est déterminée que par les conditions du mouvement acquis par *le seul et unique point* M ; la loi de génération *nécessairement constante*, c'est-à-dire identique en chaque point de cette droite, est donc celle de la courbe elle-même, dans l'hypothèse où la loi générative curviligne deviendrait permanente, à partir du point M.

Il est donc permis de dire :

La tangente est la limite vers laquelle tend une sécante dont l'un des points d'intersection, supposé mobile, se rapproche indéfiniment de l'autre, supposé fixe, jusqu'à ce que ces points se confondent.

Cette définition fondamentale, déduite rationnellement et simplement de la continuité qui se manifeste tangentiellement dans le mouvement curviligne, permet d'établir avec promptitude la théorie élémentaire des courbes.

147. *Signification géométrique de* $\frac{d\alpha}{dm}$. — La dérivée $\frac{d\alpha}{dm}$ a une signification concrète remarquable et simple qui, croyons-nous, n'avait encore été ni reconnue ni établie.



Soient M et M′ deux points d'une courbe, dont l'origine polaire est O et OX l'axe de translation ; le triangle OMM′ fournit aisément

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{\sin OMM'}{\sin OM'M}$$

Désignant par m le rayon recteur OM, par Δm la *différence* de OM à OM′ et par $\Delta\alpha$ la différence des angles M′Ox et MOx, cette égalité prend la forme

$$\frac{m+\Delta m}{m} = \frac{\sin OMM'}{\sin OM'M}$$

d'où

$$\frac{\sin \mathrm{OMM'} - \sin \mathrm{OM'M}}{\Delta m} = \frac{\sin \mathrm{OM'M}}{m}$$

Une transformation factorielle trigonométrique très-connue donne ensuite

$$\frac{2 \sin \dfrac{\mathrm{OMM'}-\mathrm{OM'M}}{2} \cos \dfrac{\mathrm{OMM'}+\mathrm{OM'M}}{2}}{\Delta m} = \frac{\sin \mathrm{OM'M}}{m} \qquad (1)$$

Mais il est clair que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{OM\,M'} = 2^d - \mathrm{M'MX} \\ -\mathrm{OM'M} = \Delta\alpha - \mathrm{M'MX} \end{array}\right\} \text{ d'où } \frac{\mathrm{OMM'}-\mathrm{OM'M}}{2} = 1^d - \left[\mathrm{M'MX} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$$

$$\mathrm{OMM'}+\mathrm{OM'M} = 2^d - \Delta\alpha\,, \text{ d'où } \frac{\mathrm{OMM'}+\mathrm{OM'M}}{2} = 1^d - \frac{\Delta\alpha}{2}$$

d'où encore

$$\sin \frac{\mathrm{OMM'}-\mathrm{OM'M}}{2} = \cos\left(\mathrm{M'MX} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \frac{\mathrm{OMM'}+\mathrm{OM'M}}{2} = \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$$

A l'aide de ces relations on obtiendra, par substitution dans (1),

$$\frac{2 \sin \dfrac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta m} = \frac{1}{m} \, \frac{\sin (\mathrm{M'MX} - \Delta\alpha)}{\cos \left(\mathrm{M'MX} - \dfrac{\Delta\alpha}{2}\right)}$$

et le passage à la limite fournit immédiatement, en représentant par MT la position vers laquelle tend la sécante MM', à mesure que α converge vers zéro,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{m} \cdot \text{tang TMX} \qquad (2)$$

Disons donc, sous forme de théorème,

La tangente trigonométrique de l'angle fait, avec le rayon vecteur d'un point, par la touchante à la courbe en ce point, a pour expression le produit du rayon vecteur par la dérivée polaire correspondante.

Il est clair que la valeur de cet angle change avec le point considéré, suivant une loi déterminée qui est la conséquence immédiate de la forme de la courbe.

148. Équation de la tangente en un point donné d'une courbe. — Soient $(a\ ,\ b\sqrt{-1})$ le point de contact, α l'angle fait par le rayon vecteur de ce point avec l'axe de translation; cet angle est fourni par l'équation polaire

$$\alpha_{a,b} = \mathrm{F}(m_{a,b})$$

La tangente fait avec le rayon vecteur du point de contact un angle θ, déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{d\,\alpha_{a,b}}{dm_{a,b}}\ m_{a,b}$$

Dès lors l'équation de la tangente sera celle d'une droite (n° 135) qui, en passant par le point $(a\ ,\ b\sqrt{-1})$, est inclinée sur une autre de l'angle donné θ; cette équation est donc

$$i = a - b\,\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\left[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)\right]$$

149. Équation de la tangente menée par un point extérieur. — Soient $(p\ ,\ q\sqrt{-1})$ le point donné et $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ le point de contact qu'il s'agit de déterminer. L'équation polaire donne

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \qquad (1)$$

En représentant toujours par θ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact, et par t l'angle que cette tangente fait avec l'axe de translation, on a

$$t = \theta + \alpha$$

Mais il est évident que la tangente est ici une droite qui passe (n° 137) par deux points donnés, et qu'ainsi

$$\operatorname{tang} t = \frac{q-y}{p-x}$$

De plus (n° 147), le coefficient directeur tangentiel donne,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}}\ m_{x,y}$$

et d'ailleurs comme

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}$$

on aura, après substitution dans $t = \theta + \alpha$,

$$\frac{q-y}{p-x} = \frac{m_{x,y}\,\dfrac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} + \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{x}\,m_{x,y}\,\dfrac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}}} \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2), ne renfermant que les inconnues x et y, déterminent, on le voit, le point de contact; la tangente, passant dès lors par deux points connus, aura (nº 137) pour équation

$$t = \frac{qx-py}{q-y} + m\left[\cos.\text{arc tang} = \frac{q-y}{p-x} + \sqrt{-1}\sin.\text{arc tang} = \frac{q-y}{p-x}\right]$$

150. Équation d'une tangente parallèle a une droite donnée. — En donnant à x, y, t, θ, α les mêmes significations que dans la question précédente, on aura encore pour déterminer les quantités x et y, les deux équations simultanées,

$$\alpha_{x,y} = F(m_{x,y}) \tag{3}$$

$$m_{x,y}\frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} = \frac{\text{tang}\ t - \dfrac{x}{y}}{1 + \dfrac{y}{x}\text{tang}\ t} \tag{4}$$

La tangente passe ainsi par le point $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ en faisant avec l'axe de translation l'angle donné t; son équation est donc (nº 135) :

$$i = x - y\frac{\cos t}{\sin t} + m\,[\cos t + \sqrt{-1}\sin t]$$

151. De la normale. — On appelle *normale*, la perpendiculaire menée à la tangente par le point de contact. Cherchons d'abord l'équation d'*une normale menée par un point d'une courbe;* soient a et $b\sqrt{-1}$ les équations de ce point, α l'inclinaison du rayon vecteur correspondant sur l'axe, θ l'angle fait par la tangente avec le rayon vecteur; l'équation de la normale sera celle d'une droite passant par un point donné, et perpendiculaire à la tangente, dont l'équation a été trouvée (nº 148); on aura donc, (nº 136, 1º), pour équation de la normale,

$$i = a + b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)]$$

152. *Normale menée à une courbe par un point quelconque du plan de cette courbe.* — Soient encore $(p\ ,\ q\sqrt{-1})$ les équations de ce point, $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ les équations du point de contact de la tangente conjuguée à cette normale; soient α l'angle fait avec l'axe par le rayon vecteur du contact, et θ celui de la tangente avec le même rayon vecteur.

Les équations de la tangente en $(x\,,\,y\sqrt{-1})$ et de la normale en $(p\,,\,q\sqrt{-1})$, seront respectivement (n° 148 et 136, 2°),

$$i = x - y\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\left[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)\right] \quad (1)$$

$$i = p + q\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\left[-\sin(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\cos(\alpha+\theta)\right] \quad (2)$$

Remarquons que, pour le point $(x\,,\,y\sqrt{-1})$, l'équation modulaire de la courbe est

$$i = m\left[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right] \quad (3)$$

Les équations (2) et (3), existant simultanément pour le même point et par conséquent pour la même valeur de α, on doit avoir, par identification des seconds membres,

$$p + q\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} = m\left[\sin(\alpha+\theta) + \cos\alpha\right] \quad (4)$$

$$\cos(\alpha+\theta) = \sin\alpha \quad (5)$$

Ces deux dernières équations permettent de déterminer, avec facilité et promptitude, les valeurs de α et β ; et dès lors l'équation (2) ne renferme plus que l'arbitraire m et caractérise la normale demandée.

Remarque. — Si l'on voulait déterminer les coordonnées du point de contact, il faudrait résoudre les équations suivantes, par rapport à x et à y,

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \quad (6)$$

$$\operatorname{tang}\theta = m_{x,y}\cdot\frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} \quad (7)$$

De plus il est clair que le cas où le point est situé sur la courbe n'est qu'un cas particulier de celui qui vient d'être traité.

153. *Normale menée à une courbe, parallèlement à une droite donnée.* — L'équation de la droite donnée étant

$$i = m\left[\cos\mathrm{D} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{D}\right]$$

l'équation de la normale à la courbe proposée, *en un point* $(x\,,\,y\sqrt{-1})$ *qu'il s'agit de déterminer*, est nécessairement celle d'une droite menée par ce point parallèlement à la droite donnée, c'est-à-dire (n° 134) :

$$i = x - y\frac{\cos\mathrm{D}}{\sin\mathrm{D}} + m\left[\cos\mathrm{D} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{D}\right] \quad (1)$$

Le point $(x\,,\,y\sqrt{-1})$ ayant α pour argument de son rayon vecteur, l'équation polaire sera pour ce point,

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \tag{2}$$

Le point $(x\,,\,y\sqrt{-1})$ étant le point de contact de la tangente conjuguée à la normale demandée, ses coordonnées satisfont à l'équation de condition,

$$\operatorname{tang}\theta = m_{x,y}\frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} \tag{3}$$

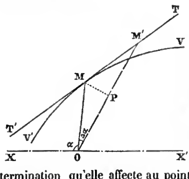
De plus on a évidemment,

$$\mathrm{D} = 1^{\delta} + \alpha + \theta \tag{4}$$

Les équations (2), (3) et (4) déterminent les quantités α, θ et $m_{x,y}$; le point $(x\,,\,y\sqrt{-1})$, par lequel il faut mener la normale, parallèlement à la droite donnée, est donc déterminé.

154. *Dérivée d'un arc de courbe.* — Soit la courbe plane dont l'équation polaire est

$$\alpha = \mathrm{F}(m)$$



En vertu de la loi de génération, à laquelle la courbe est soumise, *la direction tangentielle varie continûment;* toutefois, et en un point *quelconque* M dont les coordonnées sont α et m, si l'on regarde cette loi comme *permanente*, c'est-à-dire comme persistant dans la détermination qu'elle affecte au point M, la génération linéaire tangentielle s'accomplit de la même manière que pour le parcours curviligne ; en un mot, *c'est suivant la tangente que s'opère à* CHAQUE INSTANT *le déplacement du point décrivant*, et le changement de Δ en d distingue ce qui se passe sur la tangente de ce qui se passe sur la courbe.

Sur la tangente MT, et par rapport à l'angle MOM', ou au $\Delta\alpha$ dont l'angle $\mathrm{MOX} = \alpha$ varie, représentons par Δs le chemin correspondant décrit par le point M ; si P est la projection de M sur OM', il vient aisément

$$\overline{\mathrm{MM'}}^2 = \overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{M'P}}^2$$

$$\overline{\mathrm{M\,P}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2.\operatorname{tang}^2\Delta\alpha$$

$$\overline{\mathrm{M'P}}^2 = \overline{\mathrm{OM'} - \mathrm{OP}}^2$$

En additionnant, membre à membre, et après réductions on a

$$\overline{MM'}^2 = OP^2 . \tang^2 \Delta\alpha + \overline{OM'-OP}^2$$

Mais évidemment,

$$OP = OM . \cos MOP = m . \cos \Delta\alpha$$
$$OM' = m + \Delta m$$

L'expression de $\overline{\Delta s}^2$, ou de $\overline{MM'}^2$ devient donc,

$$\overline{\Delta s}^2 = m^2 \sin^2 \Delta\alpha + [m (1 - \cos \Delta\alpha) + \Delta m]^2$$

Pour considérer, *à la limite*, ce qui se passe soit sur la courbe soit sur la tangente, *à l'instant précis où le point générateur est en* M, il suffit de remplacer la caractéristique Δ par d, en ayant soin de remarquer qu'alors l'arc $d\alpha$ se confond avec son sinus, tandis que le cosinus de cet arc est égal à 1 : on obtient définitivement ainsi

$$\overline{ds}^2 = m^2 \overline{d\alpha}^2 + \overline{dm}^2 , \quad ou \quad \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2$$

155. *Signification géométrique de* $\frac{ds}{d\alpha}$. — En désignant par θ l'angle que la tangente fait avec le rayon vecteur, on a établi (n° 147) la relation,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{\tang \theta}{m} \quad ou \quad \frac{dm}{d\alpha} = \frac{m}{\tang \theta}$$

Si à $\frac{dm}{d\alpha}$ on substitue cette valeur dans l'expression de la dérivée de l'arc d'une courbe, il vient

$$\frac{ds}{d\alpha} = \pm \frac{m}{\sin \theta}$$

Énonçons donc, sous forme de théorème :

En un point donné la dérivée angulaire de l'arc d'une courbe, est, au signe près, égale au produit du rayon vecteur par l'inverse du sinus de l'angle fait avec ce rayon par la tangente correspondante.

Du reste cette propriété nouvelle remarquable, et qui permet de conduire assez rapidement les calculs de rectification ou de quadrature des courbes planes, résulte immédiatement de l'égalité fractionnaire

$$\frac{OM}{MM'} = \frac{\sin OM'M}{\sin MOM'}$$

dans laquelle on doit faire, *à la limite*,

$$MM' = ds \quad , \quad \widehat{OMM'} = \theta$$

$$\lim \sin MOM' = d\alpha$$

$$\lim OM'M = \lim(2^d - \theta - d\alpha) = 2^d - \theta \text{ , } \quad \textit{et} \quad \lim \sin OMM' = \sin\theta$$

156. La combinaison des relations

$$\tang\theta = m\frac{d\alpha}{dm}$$

$$\pm\frac{m}{\sin\theta} = \frac{ds}{d\alpha}$$

donne immédiatement

$$\frac{d\ s}{dm} = \pm\cos\theta$$

157. *Du cercle osculateur.* — La *courbure* résulte de la variation incessante de la direction de la tangente, et nous avons déjà dit que c'est suivant la tangente que la continuité se manifeste.

En désignant par θ l'angle qu'une tangente à la courbe $\alpha = f(m)$ fait avec le rayon vecteur, on a vu (n° 147) que

$$\tang\theta = mf'(m) \qquad ou \qquad \theta = \text{arc tang}\, mf'(m)$$

La différentiation donne à l'instant

$$d\theta = \frac{f'm + mf''m}{1+m^2f'^2m}\Delta m \qquad (1)$$

Mais la différentielle arcuelle nous apprend (n° 154) que

$$ds = \Delta m\sqrt{1+m^2f'^2m} \qquad (2)$$

Par division, les relations (1) et (2) fournissent,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f'm+mf''m}{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}$$

Telle est l'équation qui lie les variations dues à la continuité et à la courbure.

Actuellement supposons qu'à l'origine m des accroissements, le rapport $\frac{d\theta}{ds}$ persiste dans la détermination acquise, c'est-à-dire assujétissons ce rapport à conserver cette valeur qui devient ainsi permanente, alors $d\theta$ et ds deviennent respectivement $\Delta\theta$ et Δs, et l'on a :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{f'm+mf''m}{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}$$

L'uniformité se manifeste dès cet instant dans la courbe, puisque le rapport $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, qui la détermine, est *constant;* et remarquons bien que l'hypothèse de *permanence*, dans laquelle nous nous plaçons ici, n'apporte aucune modification à la courbure au point considéré comme origine, puisque, en vertu de cette hypothèse, cette courbure est maintenue dans la détermination qui lui est propre ou qui la caractérise en ce point.

Posons

$$\varrho = \frac{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}{f'm+mf''m}$$

Et l'on aura

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \varrho \quad ou \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}$$

et puisque $\Delta\theta$ désigne l'accroissement angulaire, qui, comme tel, est mesuré par un arc de cercle dont le rayon est 1, cette dernière égalité signifie que la courbe

$$\Delta s = \varrho . \Delta\theta$$

est une circonférence dont ϱ est le rayon. Cette équation exprime, entr'autres choses que, pour un même angle θ fait par la tangente en un point *quelconque* de ce nouveau lieu géométrique, l'*arc décrit est le même.*

La circonférence particulière, ainsi définie, est appelée CIRCONFÉRENCE OSCULATRICE.

Établie sous ce point de vue, cette circonférence a une signification bien nette, et forme un des caractères principaux de la courbe primitive : elle rappelle sans cesse que le changement de direction, *saisi à l'origine même de la variation,* est manifesté par elle, en un quelconque de ses points, de la même manière qu'au point particulier de la courbe proposée ; en un mot, elle a en tous ses points même courbure, et cette courbure est celle de la courbe donnée au point considéré.

Disons en passant que le rapport $\frac{1}{\varrho}$, ou l'inverse du rayon d'un cercle, sert de mesure à la courbure de ce cercle.

158. *Rayon et centre de courbure.* — La quantité ϱ, déterminée ci-dessus par l'expression,

$$\varrho = \frac{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}{f'm+mf''m}$$

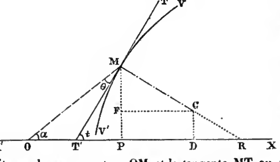
est appelé *rayon osculateur* ou *rayon de courbure*, et le centre de la circonférence osculatrice a reçu le nom de *centre de courbure*.

Afin d'avoir les éléments nécessaires à la détermination de la position du centre de courbure, il est indispensable de prendre pour point de départ la nature intime de la courbure.

Nous avons dit déjà plus d'une fois que la tangente, en un point d'une courbe, est le lieu suivant lequel la continuité s'établit et se manifeste.

La *courbure* résultant de la variation *incessante* de la direction tangentielle, il s'en suit que *si l'on veut qu'en un point donné deux courbes aient* MÊME COURBURE, il faut aussi qu'elles aient même tangente et par suite même normale : la courbe proposée et sa circonférence osculatrice étant précisément dans ce cas d'égale courbure, il est dès lors évident que le centre de courbure est situé sur la normale à la courbe au point considéré.

L'origine étant en O, soit un point M $(a, b\sqrt{-1})$ de la courbe VV′ dont le centre de courbure est C et dont le rayon de courbure est ϱ ; soient $(x, y\sqrt{-1})$ les coordonnées du point C, α et t les angles faits par le rayon vecteur OM et la tangente MT au point M avec l'axe de translation ; enfin, du point C menons la parallèle CF à XX′.



L'équation de la normale MR, au point M, est (n° 151)

$$i = a + b\,\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)]$$

équation qui montre que

$$\text{OR} = a + b\,\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} \quad et \quad \text{PR} = b\,\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}$$

On trouvera aussi avec la plus grande facilité que

$$\widehat{\text{MCF}} = \alpha+\theta-1^d \;,\quad \widehat{\text{CMF}} = 2^d-(\alpha+\theta)$$

$$\text{CF} = \text{CM}.\cos\text{MCF} = \varrho\sin(\alpha+\theta)$$

$$\text{FM} = \text{CM}.\cos\text{CMF} = \varrho\cos(\alpha+\theta)$$

d'où l'on déduit immédiatement,

$$x = a + \rho \sin(\alpha + \theta)$$
$$y = b - \rho \cos(\alpha + \theta)$$

159. *De la développée.* — On donne le nom de *développée d'une courbe*, au lieu géométrique des centres de courbure des divers points de cette courbe.

Ce lieu géométrique sera défini analytiquement par le résultat de l'élimination des quantités $a, b, m, \alpha, \rho, \theta$ entre les sept équations connues et établies précédemment,

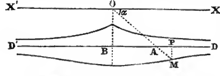
$$\alpha = f(m)$$
$$\text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$$
$$m^2 = a^2 + b^2$$
$$\text{tang}\,\theta = m.f'm$$
$$\rho = \frac{[1 + m^2 f'^2 m]^{\frac{3}{2}}}{f'm + mf''m}$$
$$x = a + \rho \sin(\alpha + \theta)$$
$$y = b - \rho \cos(\alpha + \theta)$$

160. Il resterait à trouver l'équation polaire de la circonférence osculatrice, mais nous renvoyons ce sujet au chapitre suivant, dans lequel il trouve, relativement aux coniques, sa place très naturelle.

—

APPLICATIONS.

161. De la Conchoïde. — Cette courbe découverte par *Nicomède* à propos du *problème de la duplication du cube*, est le lieu géométrique d'un point dont la distance à une droite donnée est constante, alors que cette distance est comptée sur les diverses droites menées par un même point aussi donné.



Soit la directrice DD' ainsi donnée et le pôle O, choisissons O pour origine de translation, et XX' parallèle à DD' pour axe de translation, et désignons par c la distance AM d'un point M de la courbe à la droite DD', évaluée sur le rayon vecteur OM $= m$.

Les triangles semblables ABO et AMP donnent immédiatement,

$$\frac{AO}{AM} = \frac{BO}{MP} \qquad d'où \qquad AO \,.\, MP = BO \,.\, AM \qquad (1)$$

Mais évidemment

$$AM \,.\, \sin MAP = MP \qquad (2)$$

Le produit membre à membre de ces deux relations donne,

$$AO \,.\, \sin MAP = BO$$

ou en posant $OB = d$,

$$(m-c) \sin \alpha = d \qquad d'où \qquad \text{tang}^2 \alpha = \frac{d^2}{(m-c)^2 - d^2} \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire de la conchoïde.

Valeur de f'm. — La dérivation de (3) fournit

$$\frac{d\alpha}{dm} (m-c) \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

d'où

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = -\frac{\text{tang } \alpha}{m-c} \qquad (4)$$

Valeur de f''m. — Par dérivation de (4) on trouve aisément

$$f''m = -\frac{1}{(m-c)^2 \text{ tang } \alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire. — D'après ce qui a été établi (n° 154), on aura

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m-c}{\text{tang } \alpha}\right)^2$$

d'où

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} - c\,\frac{2m-c}{\text{tang}^2 \alpha} \qquad (6)$$

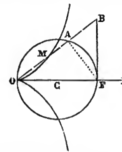
Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact. — La propriété (n° 147), apprend que

$$\text{tang } \theta = -\frac{m}{m-c} \text{ tang } \alpha \qquad (7)$$

Rayon de courbure. — La valeur générale trouvée (n° 157) pour cette grandeur donne,

$$\rho = -\frac{\text{tang } \alpha}{m-c}\,\frac{(m-c)^2 + m^2 \text{ tang}^2 \alpha}{m + (m-c) \text{ tang}^2 \alpha} \qquad (8)$$

162. De la Cissoïde.— Cette courbe est due à *Dioclès*, et sa découverte a été provoquée par le problème de la *recherche des deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données.*



Soit un point O fixe sur une circonférence donnée de rayon $OC = R$; traçons le diamètre du point O, et la tangente BF à l'extrémité de ce diamètre ; ensuite, sur un rayon vecteur OB quelconque passant par l'origine ou le pôle O, prenons la distance OM égale à la partie *extérieure* AB de la sécante ainsi considérée : le lieu géométrique du point M est la courbe appelée *Cissoïde.*

Traçons AF, et la simple loi de projection linéaire, fournit successivement, en désignant par α l'angle variable BOX fait par OB avec l'axe OX de translation, et par m la distance OM, variable aussi,

$$OA = OF \,.\, \cos BOX = 2R \,.\, \cos\alpha$$
$$OB = OA + AB = m + OA$$

d'où par addition, membre à membre,

$$OB = m + 2R \cos\alpha \qquad (1)$$

D'autre part, le triangle BOF donne,

$$OF = OB \,.\, \cos BOX \quad ou \quad 2R = OB \,.\, \cos\alpha \qquad (2)$$

Le produit, membre à membre, des relations (1) et (2) est

$$2R = (m + 2R\cos\alpha)\cos\alpha$$

ou, après simplifications,

$$2R\sin^2\alpha = m\cos\alpha \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire de la Cissoïde.

Valeur de f'm. — La dérivation de (3) fournit

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{(m + 4R\cos\alpha)\tan\alpha} \qquad (4)$$

Valeur de f''m. — La dérivation de (4) donne

$$f'' = \frac{(m+4R\cos\alpha)^2\sin\alpha - m\,.\cos^3\alpha}{(m+4R\cos\alpha)^3\sin\alpha\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire. — La formule $\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2$, conduit à

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + (m + 4R\cos\alpha)^2 \tan^2\alpha \qquad (6)$$

Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact. — D'après la formule trouvée (n° 147), on obtient

$$\tang \theta = \frac{m}{(m+4R\cos\alpha)\tang\alpha} \tag{7}$$

Rayon de courbure. — En employant la formule (n° 157), on aura

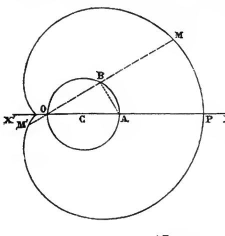
$$\rho = \frac{(m+4R\cos\alpha)\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{(m+4R\cos\alpha)\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}{(m+4R\cos\alpha)^2(\cos^3\alpha - m\sin\alpha) - m^2\cos^3\alpha} \tag{8}$$

163. *Limaçon de* Pascal. — Donnons d'abord la description de cette courbe.

Par un point O d'une circonférence menons la ligne diamétrale OCX que nous choisissons pour axe de translation, et sur laquelle nous prenons un point P, tel que

$$OP > OA$$

Par le pôle O menons diverses sécantes sur lesquelles, à partir de leurs seconds points de rencontre avec la circonférence, nous portons des longueurs égales à



$$AP = p$$

Le lieu géométrique des points M ainsi obtenus est le *limaçon de Pascal,* dont nous allons chercher l'équation.

Tirant la droite AB, le triangle rectangle ABO donne,

$$OB = OA \cdot \cos MOP$$

De plus

$$OM = OB + BM = OB + AP$$

Par suite, si l'on pose $\widehat{MOP} = \alpha$, et $CO = R$, $MO = m$, il viendra

$$OB = 2R\cos\alpha \tag{1}$$

$$m = OB + p \tag{2}$$

D'où, par addition membre à membre,

$$m = p + 2R \cos \alpha \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire très-simple du *limaçon de Pascal*.

Valeur de $f'm$.

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = -\frac{1}{2R \sin \alpha} \qquad (4)$$

Valeur de $f''m$.

$$f''m = -\frac{\cos \alpha}{4R^2 \sin^3 \alpha} = \frac{p-m}{8R^3 \sin^3 \alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire.

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + 4R^2 \sin^2 \alpha \qquad (6)$$

ou encore, après combinaison avec (3),

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = 4R^2 - p^2 + 2mp \qquad (7)$$

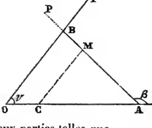
Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact.

$$\tang \theta = -\frac{m}{2R \sin \alpha} \qquad (8)$$

Rayon de courbure. — On obtient

$$\rho = -\frac{m^2 + 4R^2 \sin^3 \alpha}{m \cos \alpha + 2R \sin^2 \alpha} = -\frac{m^2 + [4R^2 - \overline{m-p}^2] \sin \alpha}{2R + p \cos \alpha} \qquad (9)$$

164. Problème. — *Deux droites et un point étant donnés, par ce point l'on mène des sécantes terminées à ces droites; on demande le lieu géométrique des points qui divisent ces sécantes dans un rapport donné* r, *à partir de l'une des droites données.*



Soient les deux droites OX et OY et le point P donné; choisissons O pour pôle, et OX pour axe de translation et représentons par a, $b\sqrt{-1}$ les équations du point P, et par v l'angle YOX.

Soient aussi M le point qui divise la partie AB de la sécante quelconque AP menée par P, en deux parties telles que

$$\frac{AB}{BM} = r$$

L'équation de la droite AP sera, en désignant par β l'angle PAX,

$$i = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1[\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta] \qquad (1)$$

Par conséquent

$$AO = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

La parallèle à OY, menée par le point M, a pour équation, en posant $OC = d$,

$$i = d + m_2[\cos v + \sqrt{-1}\sin v] \qquad (2)$$

De plus on a évidemment

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AO}{CO}$$

d'où

$$rd = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta}, \quad et \quad d = \frac{a}{r} - \frac{b}{r}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \qquad (3)$$

Déterminons actuellement les éléments du point M de rencontre des droites CM et AM, et il viendra, après avoir remplacé dans (2) la quantité d par sa valeur (3),

$$a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1[\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta]$$
$$= \frac{a}{r} - \frac{b}{r}\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_2[\cos v + \sqrt{-1}\sin v]$$

d'où, en isolant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\frac{a}{r}(r-1) - \frac{b}{r}(r-1)\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1\cos\beta + m_2\cos v = 0 \quad (4)$$

$$m_1\sin\beta = m_2\sin v \qquad (5)$$

Ces deux dernières équations renferment les trois inconnues m_1, m_2, et β, et peuvent fournir les expressions de m_1 et m_2, qui ne sont qu'au premier degré dans ces équations, en fonction de la troisième β de ces quantités; on aura ainsi en particulier,

$$m_2 = \varphi(\beta) \qquad (6)$$

et ce sera là l'équation cherchée du lieu géométrique proposé.

Ajoutons encore que si l'on voulait ensuite se servir de l'équation génératrice (2), il faudrait mettre (6) sous la forme,

$$\beta = \varphi(m_2)$$

puis substituer dans (3), et transporter la valeur de d, ainsi obtenue, dans l'équation (2).

La courbe (6) est une parabole sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir dans le chapitre suivant.

V

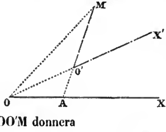
PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES.

—

Transformation des coordonnées polaires. — Condition pour qu'un point soit situé sur une courbe. — Intersection d'une droite et d'une courbe. — Coordonnées polaires du milieu de la corde d'intersection. — Lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à une même direction. — Lignes diamétrales, diamètres rectilignes. — Ellipse ; ses sommets, ses axes, ses diamètres conjugués ; sa symétrie droite et oblique. — Équation de la courbe. — Coefficient de direction tangentielle. — Propriété caractéristique tangentielle établie par voie analytique et par voie dynamique. — Rayon et centre de courbure. — Circonférence ; diamètre, tangente, normale. — Hyperbole ; sommets, axes, diamètres conjugués ; sa symétrie. — Équation de la courbe. — Direction tangentielle. — Caractère concret de la tangente. — Rayon et centre de courbe. — Asymptotes. — Parabole, foyer, diamètres conjugués ; tangente ; rayon et centre de courbure.

165. *Transformation des coordonnées polaires.* — Il est souvent nécessaire de changer d'origine et d'axe de translation, et des formules générales deviennent ainsi indispensables.

Soit donc le point M dont les coordonnées m et α sont rapportées à l'axe OX et à l'origine O, et qui doit être considéré par rapport à l'origine O′ et à l'axe O′X′. Nous supposerons d'abord que l'axe O′X′ passe par le point O : en représentant par d l'angle XOX′, par m' et α' les coordonnées polaires nouvelles, il est clair que le triangle OO′M donnera



$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M}} = \frac{\sin\ \mathrm{OO'M}}{\sin\ \mathrm{O'OM}}$$

d'où l'on déduit

$$m \sin(\alpha - d) = m' \sin \alpha' \qquad (1)$$

Le triangle AOO' donne aussi, en posant $OO' = l$,

$$\frac{AO'}{OO'} = \frac{\sin XOX'}{\sin OAA'}$$

relation qui fournit, puisque $\widehat{OAA'} = 2^d - (d + \alpha')$,

$$AO' = \frac{l \sin d}{\sin (d+\alpha')}$$

Du triangle AMO on tire

$$\frac{AM}{MO} = \frac{\sin MOX}{\sin MAO}$$

d'où

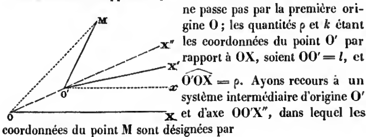
$$AM = \frac{m \sin \alpha}{\sin (d+\alpha')}$$

La soustraction de AO' hors de AM, conduit à

$$m' \sin (d+\alpha') = m \sin \alpha - l \sin d \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) serviront à déterminer α' et m' en fonction de α et de m.

En second lieu supposons que le nouvel axe O'X' de translation ne passe pas par la première origine O ; les quantités ρ et k étant les coordonnées du point O' par rapport à OX, soient $OO' = l$, et $\widehat{O'OX} = \rho$. Ayons recours à un système intermédiaire d'origine O' et d'axe OO'X'', dans lequel les coordonnées du point M sont désignées par



$$m' = OM \quad , \quad \widehat{MO'X''} = \alpha''$$

Si par le point O' on mène O'x parallèle à OX, il viendra, en représentant par d l'angle des axes OX et O'X',

$$\widehat{X'OX''} = \rho - d$$

D'ailleurs comme l'angle MOX'' donne évidemment,

$$MOX'' = MOX' - X'OX''$$

ou,

$$\alpha'' = \alpha' - \rho + d$$

il viendra, en remplaçant dans (1) et (2), d par ρ et α' par cette valeur de α'',

$$m \sin(\alpha-\rho) = m' \sin(d+\alpha'-\rho) \quad (3)$$

$$m' \sin(d+\alpha') = m \sin\alpha - l \sin\rho \quad (4)$$

166. *Condition pour qu'un point donné soit situé sur une courbe donnée.* — Soit le point $(a\ ,\ b\sqrt{-1})$ pour lequel, μ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe,

$$\text{tang}\,\mu = \frac{b}{a}\ ,\qquad \sin\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\qquad \cos\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Il faudra, m et α étant les coordonnées polaires courantes curvilignes, que l'on ait

$$m^2 = a^2 + b^2\ ,\qquad \alpha = \mu$$

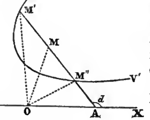
et par suite l'équation polaire

$$\alpha = f(m)$$

devant être satisfaite par les nouvelles valeurs de α et de m, donnera la condition

$$\text{arc}\left[\text{tang} = \frac{b}{a}\right] = f\sqrt{a^2+b^2}$$

167. *Intersection d'une droite et d'une courbe.* — Sans restreindre la généralité de cette question, supposons que la droite donnée AM, passe par le point A situé sur l'axe de translation, et fasse avec cet axe un angle égal à d : cette droite rencontre la courbe VV' en des points qu'il s'agit de déterminer.



L'origine étant en O, l'équation de la courbe est

$$i = m_1 [\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \quad (1)$$

Si l'on pose AO $= l$, l'équation de la sécante AM sera

$$i = l + m_2 [\cos d + \sqrt{-1}\sin d] \quad (2)$$

L'identification des seconds membres de ces équations donne,

$$l + m_2 \cos d = m_1 \cos\alpha \quad (3)$$

$$m_2 \sin d = m_1 \sin\alpha \quad (4)$$

Et comme le point m_1, α est situé sur la courbe VV', on a aussi

$$\alpha = f(m_1)$$

Les équations (3), (4) et (5) serviront donc à déterminer les valeurs des trois quantités m_1, m_2, α, en adoptant la marche suivante, la plus simple et la plus méthodique possible.

Si l'on élève au carré les équations (3) et (4), on trouve par addition,

$$m_2^2 + 2l \cos d . m_2 - m_1^2 + l^2 = 0$$

qui devient, après introduction de la valeur de m_1, fournie par (4),

$$m_2^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 d) + 2l \cos d \sin^2 \alpha . m_2 + l^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (5)$$

équation qui, étant résolue par rapport à m_2, donne aisément

$$m_2 = \frac{l \sin d . \sin (\alpha \mp d)}{\cos^2 \alpha - \cos^2 d}$$

d'où

$$m'_2 = - \frac{l \sin \alpha}{\sin (d + \alpha)} \quad , \quad m''_2 = \frac{l \sin \alpha}{\sin (d - \alpha)} \quad (6)$$

Les valeurs correspondantes de m_1 seront dès lors, en vertu de (4),

$$m'_1 = \frac{- l \sin d}{\sin (d + \alpha)} \quad , \quad m''_1 = \frac{l \sin d}{\sin (d - \alpha)} \quad (7)$$

168. *Coordonnées polaires du milieu de la corde d'intersection.* — Désignons par M le milieu de M'M'', et posons

$$MO = p \qquad et \qquad \widehat{MOX} = \Delta$$

Il est clair que

$$AM = \frac{m'_2 + m''_2}{2}$$

d'où, en vertu de la composition de l'équation (5) du second degré,

$$AM = - \frac{l \sin^2 \alpha \cos d}{\cos^2 \alpha - \sin^2 d} = \frac{l \sin^2 \alpha \cos d}{\cos^2 \alpha - \cos^2 d} \quad (8)$$

Pour déterminer p et Δ, considérons les équations directives des lignes OP, d'une part, et OAP de l'autre,

$$i = p [\cos \Delta + \sqrt{-1} \sin \Delta] \quad (9)$$

$$i = l + l \frac{\sin^2 \alpha \cos d}{\cos^2 \alpha - \cos^2 d} [\cos d + \sqrt{-1} \sin d] \quad (10)$$

En identifiant les seconds membres, on aura les équations de condition,

$$\frac{p}{l}\cos\Delta = 1 + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} \quad (11)$$

$$\frac{p}{l}\sin\Delta = \frac{\sin^2\alpha\sin d\cos d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} \quad (12)$$

Par addition des carrés de ces équations, il vient

$$\frac{p^2}{l^2} = 1 + \frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} + \frac{\sin^4\alpha\cos^2 d}{(\cos^2\alpha - \cos^2 d)^2}$$

d'où, après des réductions faciles à exécuter,

$$p^2 = l^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{(\cos^2\alpha - \cos^2 d)^2}\right]\sin^2 d \quad (13)$$

La division, membre à membre des équations (11) et (12), fournit

$$\operatorname{tang}\Delta = \sin d\cos d\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d + \sin^2\alpha\cos^2 d}$$

ou, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang}\Delta\,.\,\operatorname{tang} d = \operatorname{tang}^2\alpha \quad (14)$$

Les équations (13) et (14) déterminent p et Δ, si l'on a soin d'y donner à α la valeur fournie par les équations

$$\alpha = f(m_1) \qquad \text{et} \qquad m_1 = \mp\frac{l\sin\alpha}{\sin(d\pm\alpha)}$$

169. *Ligne diamétrale.* — Dans toute courbe les milieux des cordes parallèles à la même direction forment une courbe à laquelle on a donné le nom de *courbe diamétrale* ou de *ligne diamétrale de la courbe proposée.*

Il est évident que pour obtenir l'équation de cette nouvelle ligne, il suffit d'éliminer l, m et α entre les équations

$$\alpha = f(m_1)$$

$$m_1 = \mp\frac{l\sin d}{\sin(d\pm\alpha)}$$

$$p^2 = \frac{l^2\sin^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}\left[\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}\right]$$

$$\operatorname{tang}\Delta\,.\,\operatorname{tang} d - \operatorname{tang}^2\alpha = 0$$

On obtient de cette manière la relation,

$$\text{tang}\,\Delta = \varphi(p)$$

qui est l'équation cherchée du lieu des milieux des cordes parallèles à une même direction donnée.

Au point de vue théorique, cette question est évidemment résolue ; mais il n'en est pas de même au point de vue pratique : excepté quelques cas simples et peu nombreux, la science ne fournit pas encore les moyens d'obtenir par élimination cette résultante diamétrale, et aussitôt que les courbes sont transcendantes, ou même algébriques, mais d'un degré supérieur au second, la recherche des lignes diamétrales demeure sans importance directe effective.

Cet inconvénient est aussi attaché aux autres systèmes coordonnés que l'on a imaginés, et c'est seulement dans très-peu de cas particuliers que l'on peut employer ces formules générales.

On s'est proposé de trouver si, parmi les lignes diamétrales, il n'y avait pas de *lignes droites*, et la difficulté, presque ou souvent insurmontable de la question générale, a ainsi laissé la plus grande importance à la recherche des *diamètres rectilignes*.

Pour chaque courbe on doit recourir, quant à la détermination de ces diamètres, à des considérations spéciales qui dépendent de la nature et de la forme de la courbe : pour les sections que l'on peut produire dans un cône par un plan sécant, nous aurons soin d'exposer de la manière la plus simple possible, la théorie de ces lignes si remarquables.

—

Ellipse.

170. Cette courbe est engendrée par le mouvement d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés *foyers*, est constante; ces distances s'appellent les *rayons vecteurs* du point correspondant.

Représentons par $2a$ la somme ainsi considérée, et par $2c$ la distance des foyers : il est clair que les points de la courbe, situés sur la droite qui unit les foyers, sont éloignés d'une quantité a du milieu de la distance $2c$.

Remarquons en outre que les divers triangles dont les points de la courbe sont un sommet et dont les deux autres sont les foyers, nous permettent d'appliquer cette propriété si connue et si simple,

De tous les triangles de même périmètre et de même base, celui dont la hauteur est la plus grande est le triangle isocèle : cette hauteur sera donc, en la désignant par b, fournie par l'expression

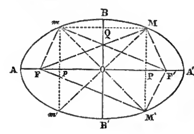
$$b^2 = a^2 - c^2$$

Les quantités a et b sont évidemment les valeurs *maximum* et *minimum* de la distance d'un point de l'ellipse *au milieu de la distance des foyers*.

Les droites qui joignent les deux points appartenant à chacune de ces deux distances s'appellent les *axes* de l'ellipse : le *grand axe* $2a$ passe les foyers, le *petit axe* $2b$ est perpendiculaire sur le premier, qu'il divise en deux parties égales. — Les extrémités de ces axes portent le nom de *sommets* de la courbe.

171. Théorème I. — *L'ellipse est symétrique par rapport à chacun de ses axes.*

Démonstration. — Soient F et F′ les deux foyers et A, A′, B et B′ les quatre sommets.



O étant le milieu de FF′, considérons *en premier lieu* les deux points M et M′, symétriques par rapport à AA′ et pour lesquels on a conséquemment,

$$FM' = FM \quad et \quad F'M' = F'M$$

d'où

$$FM' + F'M' = FM + F'M \qquad (1)$$

Si le point M appartient à la courbe, on a aussi

$$FM + F'M = 2a \qquad (2)$$

La combinaison, par addition, de (1) et (2) donne

$$FM' + F'M' = 2a$$

Le point M′, symétrique de M, est donc sur la courbe.

En second lieu, si le point m est symétrique de M par rapport à BB′, c'est-à-dire si

$$mQ = MQ \qquad et \qquad Om = OM$$

il s'en suit que

$$Fm = F'M \qquad et \qquad mF' = MF$$

d'où

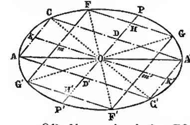
$$Fm + F'm = FM + F'M$$

172. Corollaire. — *Toute corde passant par le milieu de la distance des foyers est divisée par ce point en deux parties égales.*

Pour établir cette loi, il suffit, en considérant par exemple la corde MOm', d'imaginer la corde M'Om symétrique de la première par rapport au grand axe AA'; la symétrie, relative au petit axe BB', rend ensuite cette propriété évidente : le point O a, dès lors, reçu le nom de *centre* de l'ellipse.

173. Théorème II. — *Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à une même direction est une ligne droite passant par le centre.*

Démonstration. — Soit A'C la direction de ces cordes, pour laquelle il s'agit de prouver que la ligne droite OD, menée par le centre O et par le milieu D de A'C, est le lieu géométrique demandé. Soit une autre corde FG parallèle à A'C, dont il faut démontrer que le milieu est le point H où cette corde rencontre OD. Menons les droites FOF', GOG', COC', pour lesquelles on a (n° 172),



$$FO = F'O \ , \quad GO = G'O \ , \quad CO = C'O$$

Après avoir tiré les lignes AC, AC', A'C', FG', F'G et F'G', il est évident que les quadrilatères ACA'C', FGF'G' sont des parallélogrammes, dans le premier desquels la parallèle KOK', menée par le centre O aux côtés A'C et FG, passe nécessairement par les milieux m et m' des côtés FG' et F'G du second parallélogramme.

Dès lors la droite DOD', qui est d'ailleurs parallèle à AC puisque dans le triangle AA'C, les points D et O sont les milieux respectifs des côtés A'C et AA', est aussi parallèle aux côtés FG' et F'G de la figure FF'GG' : cette droite POP' passe donc par le milieu H de la corde FG.

Ce lieu géométrique est, comme on le voit, un *diamètre* de l'ellipse.

174. Corollaire. — *Le diamètre parallèle à des cordes de même direction est le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles au diamètre qui correspond à cette direction.*

Cette loi, qui devient évidente en présence du parallélisme des droites AC et FG', prouve, par suite du théorème précédent, qu'*il*

y a un nombre illimité de diamètres qui jouissent de cette propriété : *cette réciprocité de fonctions* entre ces deux diamètres leur a fait donner le nom de *diamètres conjugués*.

175. De ce qui précède il ressort, à titre de remarque, que *deux diamètres conjugués* sont respectivement parallèles à des cordes menées par les extrémités du grand axe.

En général, on appelle cordes ***supplémentaires celles qui sont menées d'un point de l'ellipse aux extrémités d'un diamètre quelconque.***

176. *Équation polaire de l'ellipse.* — En prenant le centre pour pôle, et la ligne des foyers pour axe de translation, en désignant par $2a$ le grand axe et par α et α' les angles que font avec cet axe les rayons vecteurs correspondants m et $2a-m$, les équations directives des rayons vecteurs d'un point seront, en représentant par $2c$ la distance des foyers,

$$i = -c + m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$
$$i = c + (2a-m)[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha']$$

L'identification des seconds membres de ces équations donne

$$-c+m[\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha]=c+(2a-m)[\cos\alpha'+\sqrt{-1}\sin\alpha']$$

d'où

$$-2c+m\cos\alpha = (2a-m)\cos\alpha'$$
$$m\sin\alpha = (2a-m)\sin\alpha'$$

Et par addition des carrés,

$$4c^2+m^2-4cm\cos\alpha = 4a^2+m^2-4am$$

d'où encore

$$\cos\alpha = \frac{am-(a^2-c^2)}{cm} \qquad (1)$$

ou bien

$$m = \frac{a^2-c^2}{a-c\cos\alpha} \qquad (2)$$

par suite

$$\cos\alpha' = \frac{am-(a^2+c^2)}{c(2a-m)}$$

Il est à remarquer que cette dernière relation se déduit immédiatement de (1) par le changement de signe de c et en remplaçant m par $2a-m$; l'une des équations (1) ou (2) suffit donc à la représentation complète de la courbe.



Le second rayon vecteur elliptique sera

$$2a-m = \frac{a^2+c^2-2ac\cos\alpha}{a-c\cos\alpha} \qquad (3)$$

Observation. — Si le pôle est placé à l'un des foyers, l'équation de la courbe sera encore la même, seulement il est bon de remarquer que, dans cette équation, α *est l'angle formé par le rayon polaire avec l'axe de translation*, tandis que dans l'équation (1) du paragraphe précédent, α *est l'angle du rayon elliptique avec l'axe de translation.*

177. De l'équation de cette courbe on tire, par dérivation,

$$\frac{d\alpha}{dm} = -\frac{a-c\cos\alpha}{cm\sin\alpha} = -\frac{a^2-c^2}{cm^2\sin\alpha}$$

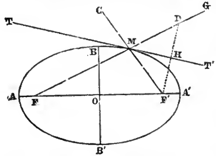
Si l'on désigne par θ l'angle que la tangente au point donné fait avec le rayon vecteur de ce point, on trouvera (n° 147),

$$\tang\theta = -\frac{a-c\cos\alpha}{c\sin\alpha} \qquad (4)$$

Après avoir pris l'un des foyers pour pôle, on pourrait supposer que l'autre foyer devient pôle à son tour : l'équation de la courbe restera évidemment la même, au seul changement près de α en α' et réciproquement.

178. Théorème III. — *La tangente est la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs du point de contact.*

Démonstration. — Soit le point M, dont les deux rayons vecteurs sont FM et F'M, et dont TMT' est la tangente ; du point F' menons, à TT', la perpendiculaire F'HD dont l'intersection avec FMG est le point D.



Supposons que le foyer F soit le pôle de l'ellipse ; en représentant par n le module relatif à la droite F'D, par α l'angle MFA', et par θ l'angle FMT', on aura pour équation du rayon vecteur FMD,

$$i = m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \qquad (1)$$

et (n° 131) pour équation de la droite DF′, *perpendiculaire* à la tangente,

$$i = 2c + n\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin\theta] \qquad (2)$$

Pour déterminer les modules m et n, du point D d'intersection de ces droites, nous aurons donc, en suivant le procédé déjà si souvent employé dans ce qui précède,

$$m\cos\alpha = 2c - n\sin(\alpha+\theta)$$
$$m\sin\alpha = \quad n\cos(\alpha+\theta)$$

Ces deux équations de condition, aux inconnues m et n, donnent immédiatement par leur résolution,

$$m = 2c\,[\cos\alpha - \sin\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\theta] \qquad (3)$$

Mais θ étant le coefficient de *direction tangentielle*, c'est-à-dire l'angle fait par la tangente considérée avec le rayon vecteur du point de contact on a (n° 177), relativement à l'ellipse,

$$\sin\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\theta = \cos\alpha - \frac{a}{c} \qquad (4)$$

La combinaison des relations (3) et (4) donne

$$m = \mathrm{DF} = 2a$$

D'où l'on déduit, d'après la génération de la courbe,

$$\mathrm{DM} = \mathrm{F'M}$$

et dès lors il devient évident que *la tangente* TT′ *est la bissectrice de l'angle* CMF.

179. *Autrement.* — Cette même propriété s'établit d'une manière bien plus simple comme nous l'avons déjà fait ailleurs (*).

De la définition de l'ellipse l'on déduit que si l'un des rayons vecteurs augmente, l'autre diminue d'une égale quantité; il s'en suit qu'à chaque instant le point générateur se trouve soumis, suivant les droites qui le joignent aux foyers, à des forces qui l'éloignent de l'un de ces points fixes pour le rapprocher d'autant de l'autre; ces forces de directions contraires, par rapport au grand axe, sont donc d'égale intensité, et la bissectrice de leur angle, représentant en direction la résultante de leurs actions, sera la tangente à l'ellipse. Cette tangente fait donc des angles égaux avec les rayons vecteurs de son point de contact.

(*) Voyez notre *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, n°s 233 et suivants. — Liége, mai 1860. — H. Dessain.

180. *Rayon et centre de courbure.* — On obtiendra, sans peine,

$$f'm = -\frac{a - c\cos\alpha}{cm\sin\alpha}$$

$$f''m = \frac{2ac - [a^2 + c^2 + c^2\sin^2\alpha]\cos\alpha}{c^2 m^2 \sin^3\alpha}$$

et ensuite, à l'aide de la formule (n° 157),

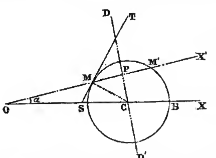
$$\varrho = \frac{m}{c}\,\frac{[a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha]^{\frac{3}{2}}}{ac - (a^2 + c^2 - ac\cos\alpha)\cos\alpha}$$

d'où l'on conclut immédiatement (n° 158) les coordonnées du centre de courbure.

—

CIRCONFÉRENCE.

181. Cette courbe est *le lieu géométrique* du mouvement *d'un point dont la distance à un point fixe donné est constante.*



Soient C le point fixe donné et M un point quelconque de la courbe, de telle manière que

$$CM = R$$

R étant la distance constante appelée *rayon*.

Par le point C menons arbitrairement la ligne CX que nous choisissons pour axe de translation, et sur laquelle nous prenons le point quelconque O pour pôle; posons

$$OC = k \quad \begin{matrix} MO = m , & \widehat{MOX} = \alpha \\ CM = R , & \widehat{MCX} = \alpha' \end{matrix}$$

Nous aurons pour équations respectives des directions CM et COM,

$$i = m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$
$$i = k + R\,[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sin\alpha']$$

En identifiant les seconds membres il viendra,

$$m\cos\alpha = k + R\cos\alpha'$$
$$m\sin\alpha = R\sin\alpha'$$

L'élimination de α', faite comme on l'a déjà vu, nous donne

$$m^2 - 2km\cos\alpha + k^2 - R^2 = 0 \qquad (1)$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{m^2 + k^2 - K^2}{2\,km} \qquad (2)$$

L'une ou l'autre des équations (1) et (2) représente analytiquement la circonférence.

Il est presqu'inutile de faire remarquer que ces équations accusent la symétrie de la courbe par rapport à OX.

Les deux valeurs de m qui, dans cette équation, répondent à une même valeur de α, fournissent les deux distances OM et OM', c'est-à-dire les deux points M et M' de rencontre de la sécante OX' avec la circonférence.

182. *Tangente.* — L'équation, dont nous nous occupons, donne aisément

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{k\cos\alpha - m}{km\sin\alpha}$$

et si l'on désigne encore par θ l'angle OMP fait par la tangente en M avec le rayon polaire OM du point de contact, on aura

$$\tan\theta = \frac{k\cos\alpha - m}{k\sin\alpha}$$

183. *Normale.* — Dès lors (n° 151) l'équation de la normale sera

$$i = m\cos\alpha + m\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + M\sqrt{-1}[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)]$$

En représentant, pour un instant, par d la distance du pôle ou point où l'axe de translation rencontre la normale, il viendra

$$d = m\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\,.\,\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}\right]$$

d'où, après quelques réductions évidentes,

$$d\,[\cos\alpha - \sin\alpha\,.\,\tan\theta] = m$$

qui devient, après avoir remplacé *tang* θ par sa valeur trouvée au numéro précédent,

$$d\left[\cos\alpha - \sin\alpha\,\frac{k\cos\alpha - m}{k\sin\alpha}\right] = m$$

d'où enfin

$$d = k$$

Concluons donc que toutes les normales passent par le centre, c'est-à-dire que *la tangente est perpendiculaire au rayon du contact.*

184. Le pôle O étant quelconque, et la courbe étant évidemment symétrique par rapport à OX, il est clair que *tous les diamètres passent par le centre*. Pour déterminer celui qui correspond à la corde MM′, il suffit de remarquer que la distance p du pôle O au milieu P de MM′ est donnée, mais en signe contraire, par la moitié du coefficient de m dans l'équation (1, n° 181), et qu'ainsi l'on a

$$p = k \cos \alpha$$

Cette relation prouve que p est la projection de k sur OX′, et que *le diamètre cherché est perpendiculaire à la corde d'intersection*.

—

Hyperbole.

185. Cette courbe est engendrée par le mouvement d'un point dont la *différence des distances à deux points fixes*, appelés *foyers*, est *constante*.

Il est incontestable que cette courbe est symétrique tant par rapport à la ligne qui passe les foyers, que par rapport à la perpendiculaire à cette ligne, menée par le milieu de la distance des foyers : on voit donc que cette courbe, indéfinie de chaque côté des foyers, se compose de deux branches symétriques par rapport à deux droites qui sont perpendiculaires l'une à l'autre, dont chacune divise en deux parties égales les cordes qui sont parallèles à l'autre, et qui pour cette raison portent le nom d'*axes principaux* ou simplement d'axes de *l'hyperbole*.

Les points de la courbe, situés sur la ligne focale, ont reçu le nom de *sommets* de la courbe, et ces points sont évidemment les plus rapprochés des foyers.

En suivant pour l'hyperbole le même mode de raisonnement qui a été employé, (n° 172) pour l'ellipse, on démontrera encore que

Théorème IV.— *Toute sécante, passant par le milieu de la droite qui unit les foyers, est divisée par ce point en deux parties égales.*

Cependant il existe des droites qui passent par ce point sans rencontrer la courbe ; ces droites sont comprises dans un angle qu'il sera bientôt nécessaire (n° 190) de déterminer d'une manière particulière.

En conséquence de la propriété qu'énonce ce théorème, le milieu de la distance focale a reçu le nom de *centre* de l'hyperbole.

THÉORÈME V. — *Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à une même direction est une ligne droite qui passe par le centre de l'hyperbole;* ou encore, *le diamètre parallèle à une direction donnée est le lieu géométrique des milieux des cordes qui sont parallèles au diamètre correspondant à cette direction.*

De là aussi les diamètres conjugués et les cordes supplémentaires de l'hyperbole.

186. *Équation de l'hyperbole.* — Soient $2a$ le grand axe de la courbe, $2c$ la distance des foyers, c étant plus grand que a ; soient encore α l'inclinaison, sur l'axe de translation, du premier rayon d'un point quelconque de l'hyperbole, α' l'inclinaison sur ce même axe du second rayon $2a+m$; admettons que l'origine ou pôle soit le centre, et nous trouverons avec facilité,

$$i = -c + m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$
$$i = +c + (2a+m)[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha']$$

pour équations respectives et directives des deux rayons vecteurs d'un point quelconque.

En identifiant les seconds membres, on obtient

$$-c+m\cos\alpha = +c+(2a+m)\cos\alpha'$$
$$m\sin\alpha = (2a+m)\sin\alpha'$$

L'élimination de α' entre ces deux équations de condition, fournit

$$\cos\alpha = \frac{c^2-a^2-am}{cm} \quad (1)$$

ou aussi, et selon les besoins,

$$m = \frac{c^2-a^2}{a+c\cos\alpha} \quad (2)$$

par suite

$$\cos\alpha' = -\frac{c^2+a^2+am}{c(2a+m)} \quad (3)$$

187. De l'équation (1) ou (2) de cette courbe on tire,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{a+c\cos\alpha}{cm\sin\alpha} = \frac{c^2-a^2}{cm^2\sin\alpha} \quad (4)$$

θ représentant toujours l'angle que la tangente en un point donné d'une courbe fait avec le rayon vecteur de ce point, on aura

$$\tang\theta = \frac{a+c\cos\alpha}{c\sin\alpha} = \frac{c^2-a^2}{cm\sin\alpha} \quad (5)$$

188. Théorème VI. — *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs du point de contact.*

Cette proposition se démontre de la même manière qu'au (n° 178).

Autrement. — Les rayons vecteurs du point de contact tournent sans cesse, dans la génération de la courbe, autour de leurs foyers respectifs en conservant entr'eux la différence constante $2a$; il s'en suit que le point générateur qui se meut sur ces droites est sollicité à l'éloignement des deux foyers par des *forces égales,* attendu que la différence des chemins parcourus est la même : la résultante de ces actions égales sera donc dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs.

189. *Rayon et centre de courbure.* — Par dérivation, on a,

$$f'm = \frac{a+c\cos\alpha}{cm\sin\alpha}$$

$$f''m = -\frac{2ac+[a^2+c^2+c^2\sin^2\alpha]\cos\alpha}{c^2m^2\sin^3\alpha}.$$

Et ensuite, à l'aide de la formule (n° 157),

$$\rho = \frac{m}{c}\,\frac{[a^2+c^2+2ac\cos\alpha]^{\frac{3}{2}}}{ac+(a^2+c^2+ac\cos\alpha)\cos\alpha}$$

Les relations (n° 158) fourniraient ensuite les coordonnées du centre de courbure.

190. Asymptotes. — Lorsqu'une branche de courbe est infinie, une droite qui en approche indéfiniment, sans jamais pouvoir la rencontrer, se nomme *asymptote.*

Ces droites sont donc les tangentes aux derniers points de la courbe en général, et par exemple de l'hyperbole en particulier ; en ces points le rayon vecteur doit donc être *illimité,* d'où l'on déduit en vertu de l'équation (2, n° 186), que

$$a+c\cos\alpha = 0 \quad , \qquad \textit{ou bien} \qquad \cos\alpha = -\frac{a}{c}$$

Cette valeur de α caractérise les asymptotes, dont il est facile de trouver actuellement la construction très-simple, puisque cette relation indique évidemment que les asymptotes sont parallèles aux deux côtés égaux du triangle isocèle, dont $2a$ est la base et dont c, c sont les deux autres côtés.

On sait de plus que θ étant l'angle d'une tangente avec le rayon polaire du contact, on a (n° 187),

$$\tang \theta = \frac{c^2-a^2}{cm \sin \alpha}$$

Le rayon vecteur m est ∞, donc puisque α a nécessairement une valeur déterminée, connue ici par la relation $a+c \cos \alpha = 0$, on aura aussi

$$\tang \theta = 0$$

relation qui prouve à l'évidence que la tangente considérée, dont l'inclinaison sur l'axe de translation est,

$$\alpha_1 = \text{arc} [\cos = -\frac{a}{c}]$$

se confond avec le rayon vecteur du contact et passe ainsi par le pôle, c'est-à-dire par le centre de la courbe.

Il suffira donc de mener par le centre de l'hyperbole des parallèles aux côtés du triangle rectangle isocèle dont nous venons d'indiquer la construction.

Parabole.

191. *Cette courbe est le lieu géométrique des diverses positions d'un point assujetti à rester équidistant d'un point fixe donné, appelé* FOYER, *et d'une droite fixe aussi donnée, appelée* DIRECTRICE.

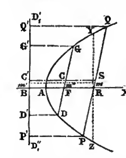
Abaissons du foyer la perpendiculaire sur la directrice, et prenons cette perpendiculaire pour axe de translation ; il est clair que le milieu de la distance de ce point à la directrice appartient à la parabole qui est ainsi une courbe à une branche, symétrique par rapport à cette perpendiculaire focale que l'on appelle *axe de la courbe*, et illimitée tant au dessus qu'au dessous de cet axe.

Par cela seul, on voit que cette courbe est dépourvue de centre puisqu'il est évidemment impossible de trouver dans son plan un point divisant en deux parties égales toutes les cordes qui y passent.

La symétrie de la parabole, par rapport à son axe, signifie en d'autres termes que *l'axe est le lieu géométrique des milieux des cordes qui lui sont perpendiculaires.*

192. Théorème VII. — *La parallèle à l'axe menée par le milieu d'une corde quelconque de la parabole, passe par les milieux de toutes les cordes parallèles à celles-là.*

Démonstration. — Par le foyer F, ou même par tout autre point de l'axe parabolique, menons une corde quelconque DFG, dont le milieu est C, et considérons une parallèle PQ à cette corde ; il faut prouver que si par C l'on mène la parallèle à BX, le point de rencontre de cette ligne avec PQ divise en deux parties égales la corde PQ.



Pour cela supposons qu'il n'en soit pas ainsi, que m soit le milieu de PQ ; $D'_1 D''_1$ étant la directrice et le point A étant le milieu de BF, on a par une propriété du trapèze,

$$2mm' = PP'+QQ'$$

et par suite

$$2mm' = PP'+QQ'-2FR \qquad (1)$$

Mais puisque C est le milieu de DG, on a aussi :

$$2CC' = DD'+GG' \qquad (2)$$

Comme il est évident que $CC' > m'm''$, on peut rapprocher les relations (1) et (2) et écrire

$$PP'+QQ'-2FR < DD'+GG'$$

d'où

$$PP'-DD'+QQ'-GG' < 2FR$$

et encore en menant GV et DT, parallèles à la directrice $D'_1 D''_1$,

$$PT+QV < 2FR$$

En prolongeant DG jusqu'à PP' et QQ', on obtient :

$$FR-D''T+FR+G''V < 2FR$$

d'où

$$D''T > G''V \qquad (3)$$

Mais les triangles DTD'' et GVG'', rectangles en T et en V, sont semblables et donnent, comme conséquence de (3), la relation suivante :

$$DD'' > GG''$$

ou bien

$$PR-DF > QR-FG$$

et

$$FG-DF > QR-PR \qquad (4)$$

Actuellement cette dernière inégalité permet de conclure que plus les parallèles PQ menées à DG s'éloignent de A, dans la direction AX, plus la différence QR—PR des segments, produits sur ces cordes par l'axe parabolique, sera petite : or, comme la courbe est continue et illimitée, l'on en déduira que cette différence finira par s'annuler, et qu'*alors une certaine corde oblique sur l'axe serait coupée par l'axe en deux parties égales.*

Cette conséquence est évidemment absurde, car si PQ était par exemple cette corde, il faudrait que l'on eut $QR = PR$; mais si en R l'on mène la perpendiculaire YRZ à l'axe AX, on sait que RY étant égale à RZ,

$$QR > RY > PR$$

L'égalité de QR et de PR est donc impossible, et conséquemment l'hypothèse, par suite de laquelle le point s ne serait pas le milieu de PQ, est pareillement impossible.

La proposition est donc démontrée et met en évidence que,

Tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.

193. Corollaire. — De cette propriété il résulte immédiatement que

La tangente à la parabole, à l'extrémité d'un diamètre, est parallèle aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales.

Cette tangente et le diamètre de son point de contact ont reçu le nom de *diamètres conjugués* de la parabole.

194. *Équation polaire de la parabole.* — Soit la parabole VV' rapportée à son foyer F et à son axe de translation AFX perpendiculaire à la directrice DD'.

Posons

$$FM = m, \widehat{MFX} = \alpha, AF = AB = p$$

Du point M menons les perpendiculaires MP et MC à l'axe et à la directrice. Comme on a

$$CM = m \quad et \quad FM = m \sin \alpha$$

les équations des chemins FM et FBCM seront,

$$i = m\,[\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha]$$
$$i = +2p - m + \sqrt{-1}\, m \sin \alpha$$

En identifiant les seconds membres de ces équations, on obtient

$$m(1+\cos\alpha) = 2p \quad , \quad d'où \quad \cos\alpha = 2\frac{m}{p} - 1 \quad \text{(A)}$$

Telle est l'équation polaire de la parabole.

195. *Valeurs de* f'm *et* f''m. — On aura avec grande facilité,

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{2p}{m^2 \sin\alpha}$$

$$f''m = -\frac{4p}{m^4}\,\frac{m\sin^2\alpha + p\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$$

196. *Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact.* — D'après la formule (n° 147), il est clair que

$$\tang\theta = +\frac{2p}{m\sin\alpha} \qquad \text{(B)}$$

197. *Propriété caractéristique de la tangente.* — De l'équation (A) on tire

$$\tang\alpha = \frac{m\sin\alpha}{2p-m}$$

et par suite

$$\tang \text{MFX}' = \frac{m\sin\alpha}{m-2p}$$

Cherchons maintenant *tang* 2θ, et nous aurons aisément, à l'aide de la valeur (B) de *tang* θ,

$$\tang 2\theta = \frac{2\tang\theta}{1-\tang^2\theta} = \frac{4mp\sin\alpha}{m^2\sin^2\alpha - 4p^2}$$

Mais de (A) l'on déduit promptement,

$$\sin^2\alpha = 4\frac{p}{m} - 4\frac{p^2}{m^2}$$

d'où l'on tire par substitution,

$$\tang 2\theta = \frac{m\sin\alpha}{m-2p}$$

Les expressions des tangentes des angles MFX' et 2θ, permettent donc, eu égard aux limites des angles α et θ, de conclure

$$2\theta = \text{MFX}' = 2^d - \alpha$$

Enonçons dès lors cette propriété, si connue,

La tangente à la parabole est la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et par la perpendiculaire menée de ce point à la directrice.

198. *Autrement.* — Puisqu'un point M de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice, c'est que, sur ce point et dans ces directions, agissent des forces *égales*, dont la résultante est ainsi dirigée suivant la bissectrice de l'angle de ces droites ; cette bissectrice est donc la tangente au point M de la courbe.

199. *Rayon et centre de courbure.* — On trouvera avec facilité, au moyen de la formule (n° 157),

$$\rho = -\frac{[m^2 \sin^2 \alpha + 4p^2]^{\frac{3}{2}}}{2mp \sin^2 \alpha + 4p^2 \cos \alpha}$$

et comme l'équation polaire de la parabole donne,

$$\sin^2 \alpha = \frac{4mp - 4p^2}{m^2}$$

il viendra en remplaçant $\sin^2 \alpha$ et $\cos \alpha$ par leurs valeurs, en fonction de m et de p,

$$\rho = -2m \sqrt{\frac{m}{p}}$$

les coordonnées du centre de courbure s'en suivent immédiatement (n° 158),

$$x = m \left[\cos \alpha - 2 \sqrt{\frac{m}{p}} \sin (\alpha + \theta)\right]$$

$$y = m \left[\sin \alpha + 2 \sqrt{\frac{m}{p}} \cos (\alpha + \theta)\right]$$

CONCLUSION.

En considérant les deux grands modes de génération de la grandeur, nous sommes parvenus à la vraie théorie des quantités positives, négatives et imaginaires.

Toutes les propriétés du calcul des quantités ordinairement appelées soient réelles, soient imaginaires, ont été établies *à priori :* nous croyons donc avoir résolu d'une manière RATIONNELLE cette importante question.

Notre théorie nouvelle introduisant et rappelant sans cesse, dans les manipulations littérales, la génération spéciale de chaque grandeur, se distingue nettement de tous les autres systèmes, qui ne voient en Algèbre que des opérations *arithmétiques,* généralisées au moyen de lettres et représentées, dans leurs diverses affections et combinaisons, par des signes *conventionnels :* il n'est donc pas étonnant que cette théorie, comme nous l'avons fait voir par plusieurs exemples, permette avec facilité et promptitude le passage du concret à l'abstrait et réciproquement.

D'ailleurs, en fait d'applications, il faut en science savoir recourir à tout système de coordonnées, et employer, dans tel ou tel genre de spéculations, celui qui se prête le plus commodément aux diverses nécessités : toutefois les principes du calcul doivent être établis d'une manière incontestable, et c'est là le but que nous avons cherché à atteindre dans ce travail.

FIN.

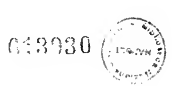


TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

—

—

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

FIN DE LA TABLE.




BIBLIOTECA